מבחן 3 - פתרון מלא

שאלה 1:

א. חום הגוף של המטופלים שהשתתפו במחקר מתפלג נורמלית. החום הממוצע הוא $37\ ^\circ C$.

נתון שחום הגוף של 84.13% מהמטופלים היה נמוך מ־$38\ ^\circ C$. חום הגוף של המטופלים מתפלג נורמלית ולכן נוכל להיעזר בטבלת ערכי Z כדי למצוא את ציון התקן שמשמאלו כלוא מתחת לעקומת ההתפלגות 84.13% מהשטח הכולל. נתבונן בתא שערכו 0.8413 ונראה שציון התקן המתאים הוא $z = 1$.

נציב את הנתונים ואת ציון התקן שמצאנו בנוסחה לחישוב ציון תקן ונבודד את סטיית התקן S:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} \;\rightarrow\; 1 = \frac{38 - 37}{S} \;\rightarrow\; 1 = \frac{1}{S} \;\rightarrow\; S = 1$$

לכן **סטיית התקן של חום הגוף של המטופלים היא $1\ ^\circ C$**.

ב. חום הגוף של נטלי **נמוך** מחום הגוף של 7.35% מהמטופלים, לכן הוא **גבוה** מחום הגוף של 92.65% מהמטופלים. ניעזר בטבלת ערכי Z כדי למצוא את ציון התקן שמשמאלו כלוא מתחת לעקומת ההתפלגות 92.65% מהשטח הכולל. נתבונן בתא שערכו 0.9265 ונראה שציון התקן המתאים הוא $z = 1.45$.

נציב את הממוצע, את סטיית התקן שמצאנו בסעיף א' ואת ציון התקן של נטלי בנוסחה לחישוב ציון תקן ונבודד את חום הגוף של נטלי x:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} \;\rightarrow\; 1.45 = \frac{x - 37}{1} \;\rightarrow\; 1.45 = x - 37 \;\rightarrow\; x = 38.45$$

לכן **חום הגוף של נטלי הוא $38.45\ ^\circ C$**.

ג. 1. נציב את הממוצע, את סטיית התקן ואת חום הגוף $38.04\ ^\circ C$ בנוסחה לחישוב ציון תקן:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} \;\rightarrow\; z = \frac{38.04 - 37}{1} \;\rightarrow\; z = 38.04 - 37 \;\rightarrow\; z = 1.04$$

ניעזר בטבלת ערכי Z כדי למצוא את אחוז השטח שכלוא מתחת לעקומת ההתפלגות הנורמלית **משמאל** לציון התקן $z = 1.04$. נתבונן בתא שבשורה **1.0** ובעמודה **4** ונראה שערכו 0.8508. מכאן נובע שמשמאל לציון תקן זה כלוא 85.08% מהשטח שמתחת לעקומה ולכן **מימינו** כלוא 14.92% מהשטח שמתחת לעקומה.

לכן **אחוז המטופלים בבית החולים הסובלים מחום גבוה הוא 14.92%**.

ג. 2. נתון שבבית החולים יש 5,000 מטופלים. בסעיף ג'1 ראינו ש־14.92% מתוכם סובלים מחום גבוה. נחשב את מספרם באופן הבא:

$$0.1492 \cdot 5{,}000 = 746$$

לכן **בבית החולים יש 746 מטופלים הסובלים מחום גבוה**.

ד. בבית חולים השני חום הגוף של המטופלים מתפלג נורמלית עם ממוצע $37\ ^\circ C$. ציון התקן של חום הגוף $37.725\ ^\circ C$ של ליאם שווה לציון התקן של חום הגוף של נטלי ולכן, לפי סעיף ב׳, $z = 1.45$.
נציב את הממוצע, את ציון התקן ואת חום הגוף של ליאם בנוסחה לחישוב ציון תקן ונבודד את סטיית התקן S:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S} \ \rightarrow\ 1.45 = \frac{37.725 - 37}{S} \ \rightarrow\ 1.45 = \frac{0.725}{S} \ \rightarrow\ 1.45 \cdot S = 0.725 \ \rightarrow\ S = 0.5$$

לכן **סטיית התקן של חום הגוף של המטופלים בבית החולים השני היא $0.5\ ^\circ C$**.

שאלה 2:

א. נציב את הנתונים מטבלת השכיחות שמשמאל בנוסחה לחישוב הממוצע $\bar{x}$ לפי ערכים ושכיחויות:

x - מספר הילדים במשפחה	4	3	2	1
f - מספר המשפחות	200	400	300	100

$$\bar{x}=\frac{x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+\cdots+x_n\cdot f_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

$$=\frac{1\cdot 100+2\cdot 300+3\cdot 400+4\cdot 200}{100+300+400+200}=\frac{100+600+1{,}200+800}{1{,}000}=\frac{2{,}700}{1{,}000}=2.7$$

לכן **מספר הילדים הממוצע במשפחה הוא 2.7**.

ב. נציב את הממוצע שחישבנו בסעיף א' ואת הנתונים מהטבלה בנוסחה לחישוב סטיית התקן S_x:

$$S_x=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2\cdot f_1+(x_2-\bar{x})^2\cdot f_2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2\cdot f_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-2.7)^2\cdot 100+(2-2.7)^2\cdot 300+(3-2.7)^2\cdot 400+(4-2.7)^2\cdot 200}{100+300+400+200}}$$

$$=\sqrt{\frac{(-1.7)^2\cdot 100+(-0.7)^2\cdot 300+(0.3)^2\cdot 400+(1.3)^2\cdot 200}{1{,}000}}$$

$$=\sqrt{\frac{2.89\cdot 100+0.49\cdot 300+0.09\cdot 400+1.69\cdot 200}{1{,}000}}$$

$$=\sqrt{\frac{289+147+36+338}{1{,}000}}=\sqrt{\frac{810}{1{,}000}}=\sqrt{0.81}=0.9$$

לכן **סטיית התקן של מספר הילדים היא 0.9**.

ג. 1. נתון: שיפוע ישר הרגרסיה הוא 1, $S_y=1.8$. נציב את הנתונים ביחד עם S_x בנוסחה לחישוב שיפוע ישר הרגרסיה ונבודד את מקדם המתאם r:

$$m=r\cdot\frac{S_y}{S_x}\ \rightarrow\ 1=r\cdot\frac{1.8}{0.9}\ \rightarrow\ 1=r\cdot 2\ \rightarrow\ r=0.5$$

מצאנו שמקדם המתאם r שווה ל-0.5 ולכן נוכל להסיק ש**עוצמת הקשר בינונית**.

ג. 2. נתון: $\bar{y}=4.7$. ביחד עם $\bar{x}$ ושיפוע ישר הרגרסיה $m=1$ הנתון בתחילת הסעיף, נוכל למצוא את **משוואת ישר הרגרסיה** באמצעות הצבה בנוסחה:

$$\tilde{y}-\bar{y}=m\cdot(x-\bar{x})\ \rightarrow\ \tilde{y}-4.7=1(x-2.7)\ \rightarrow\ \tilde{y}-4.7=x-2.7\ \rightarrow\ \tilde{y}=x+2$$

ג. 3. נציב $x=3$ במשוואת ישר הרגרסיה שמצאנו בסעיף ג'2:

$$\tilde{y}=x+2\ \rightarrow\ \tilde{y}=3+2\ \rightarrow\ \tilde{y}=5$$

כלומר, עבור משפחה עם 3 ילדים ישר הרגרסיה **מנבא** 5 ביקורים בשנה. עם זאת, נזכיר שתחזית זו מתבססת על ממוצעים וסטיות תקן ולא על מדידה בפועל. לכן **התוצאה המנובאת אינה בהכרח מדויקת**.

שאלה 3:

א. נסמן ב־A את המאורע "נבחר באקראי תלמיד מהתיכון **שתומך** בתוספת השיעורים".

כל בחירה אקראית מבין תלמידי התיכון **אינה תלויה** בבחירות אחרות ולכן מתקיים:

$$P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)=\left[P(A)\right]^5$$

נתון שההסתברות שמתלמידי התיכון נבחרו באקראי 5 תלמידים שתומכים בהוספת שיעורים היא 0.00032 ולכן נקבל את המשוואה:

$$\left[P(A)\right]^5=0.00032 \,/\sqrt[5]{\ } \quad \rightarrow \quad P(A)=0.2$$

מצאנו שאם בוחרים באקראי תלמיד מהתיכון ההסתברות שהוא תומך בהוספת שיעורים היא 0.2.

לכן, **20% מתלמידי התיכון תומכים בהוספת שיעורים**.

ב. נסמן ב־B את המאורע "להשתייך לתנועת נוער". ידוע ש־60% מתלמידי התיכון משתייכים לתנועת נוער כלשהי ולכן אם בוחרים באקראי תלמיד, ההסתברות שהוא משתייך לתנועת נוער היא: $P(B)=0.6$.

הנתונים המודגשים בטבלה משמאל הם אלה שמצאנו בסעיף א' ושהתווספו בסעיף ב'.

מהם ניתן להסיק:

- כיוון ש־ $P(A)=0.2$ אז $P(\bar{A})=0.8$.
  לכן ההסתברות לבחור תלמיד שמתנגד להוספת שיעורים היא 0.8.
- כיוון ש־ $P(B)=0.6$ אז $P(\bar{B})=0.4$.
  לכן ההסתברות לבחור תלמיד שלא משתייך לתנועת נוער היא 0.4.

מאורע	A תומך בהוספת שיעורים	$\bar{A}$ מתנגד להוספת שיעורים	
B משתייך לתנועת נוער			**0.6**
$\bar{B}$ לא משתייך לתנועת נוער			0.4
	0.2	0.8	**1**

נתון שהמאורעות B "להשתייך לתנועת נוער" ו־A "לתמוך בהוספת שיעורים" אינם תלויים זה בזה. לכן מתקיים:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.2\cdot 0.6=0.12$$

נוסיף את המידע החדש מודגש לתא המציג את החיתוך המתואר ונשלים באמצעותו את שאר התאים בטבלה משמאל.

מאורע	A תומך בהוספת שיעורים	$\bar{A}$ מתנגד להוספת שיעורים	
B משתייך לתנועת נוער	**0.12**	0.48	0.6
$\bar{B}$ לא משתייך לתנועת נוער	0.08	0.32	0.4
	0.2	0.8	**1**

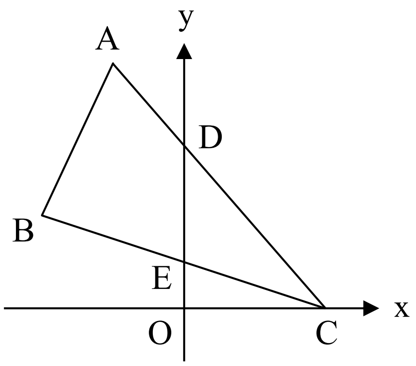
מהתבוננות בטבלה המלאה ניתן לראות ש**ההסתברות לבחור תלמיד שמשתייך לתנועת נוער ומתנגד להוספת שיעורים היא 0.48**.

ג. בסעיף ב' מצאנו שההסתברות לבחור תלמיד שמשתייך לתנועת נוער ומתנגד להוספת שיעורים היא 0.48 ולכן 48% מתלמידי התיכון שייכים לתנועת נוער ומתנגדים להוספת שיעורים. נתון שמספרם הוא 144 תלמידים ולכן נוכל לסמן ב־x את מספר התלמידים הכולל בתיכון ולקבל את המשוואה:

$$0.48 \cdot x = 144 \quad \rightarrow \quad x = 300$$

מכאן נובע ש**בתיכון לומדים 300 תלמידים**.

שאלה 4:



א. 1. הקודקוד C נמצא על ציר ה־x ולכן שיעור ה־y שלו שווה ל־0.

נתון ש־ $BE = CE$ ולכן הנקודה $E\ (0\,,2)$ היא אמצע הקטע BC.

שיעור ה־x של הנקודה B הוא 6- ולכן נוכל להציב את הנתונים בנוסחה למציאת אמצע קטע ולבודד את שיעור ה־x של הנקודה C :

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} \ \rightarrow\ 0 = \frac{-6 + x_C}{2} \ \rightarrow\ 0 = -6 + x_C \ \rightarrow\ x_C = 6$$

מכאן נובע ששיעורי הקודקוד C הם : **C (6 , 0)**.

א. 2. נציב את שיעורי ה־y של הנקודות E ו־C שמצאנו בסעיף א'1 בנוסחה למציאת אמצע קטע כדי למצוא את שיעור ה־y של הנקודה B :

$$y_E = \frac{y_B + y_C}{2} \ \rightarrow\ 2 = \frac{y_B + 0}{2} \ \rightarrow\ 2 = \frac{y_B}{2} \ \rightarrow\ y_B = 4$$

לכן שיעורי הקודקוד B הם : **B (-6 , 4)**.

ב. 1. נסמן ב־O את ראשית הצירים.

במשולש ΔCDE , הקטע CO הוא גובה חיצוני היורד מהקודקוד C אל המשך הצלע DE.

כיוון ש־CO מונח על ציר ה־x אורך הקטע שווה להפרש בין שיעורי ה־x של נקודות הקצה O ו־C :

$$CO = x_C - x_O \ \rightarrow\ CO = 6 - 0 \ \rightarrow\ CO = 6$$

הבסיס DE של המשולש ΔCDE מונח על ציר ה־y, ולכן נוכל לבטא את אורכו בתור ההפרש בין שיעורי ה־y של נקודות הקצה D ו־E :

$$DE = y_D - y_E \ \rightarrow\ DE = y_D - 2$$

נתון ששטח המשולש ΔCDE הוא 12 יח״ר.

נציב את אורכי הגובה CO והבסיס DE, שביטאנו באמצעות y_D , בנוסחה לחישוב שטח משולש ונבודד את שיעור ה־y של הקודקוד D :

$$S_{\Delta CDE} = \frac{DE \cdot CO}{2} \ \rightarrow\ 12 = \frac{(y_D - 2)\cdot 6}{2} \ \rightarrow\ 12 = (y_D - 2)\cdot 3 \ \rightarrow\ 4 = y_D - 2 \ \rightarrow\ y_D = 6$$

לבסוף, הנקודה D נמצאת על ציר ה־y ולכן שיעור ה־x שלה שווה ל־0.

מכאן נובע ששיעורי הנקודה הם : **D (0 , 6)**.

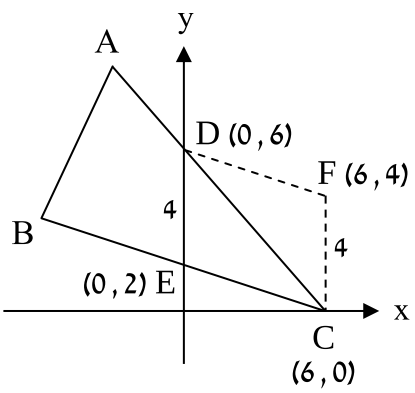
ב. 2. הישר עליו מונחת הצלע AC עובר דרך הנקודות C (6 , 0) ו־D (0 , 6), ולכן נוכל למצוא את משוואתו באמצעות הנוסחה למציאת משוואת ישר בעזרת שתי נקודות:

$$y-y_C=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}(x-x_C) \rightarrow y-0=\frac{6-0}{0-6}(x-6) \rightarrow y=\frac{6}{-6}(x-6) \rightarrow y=-(x-6)$$

$$\rightarrow y=-x+6$$

ג. המרובע CEDF הוא מקבילית אם הצלעות DE ו־CF מקבילות ושוות.

הצלע DE מונחת על ציר ה־y ואורכה הוא 4 יח'. לכן עלינו למצוא ברביע הראשון נקודה F כך שהקטע CF יקביל לציר ה־y ואורכו יהיה 4 יח'.



- הקטע CF יקביל לציר ה־y אם נבחר נקודה ששיעור ה־x שלה זהה לשיעור ה־x של C ולכן: $x_F=6$.
- הקטע CF מקביל לציר ה־y ולכן כל שנדרש על מנת שאורכו יהיה 4 יח' הוא ששיעור ה־y של הנקודה F יהיה מרוחק ב־4 יח' משיעור ה־y של הנקודה C. כיוון שאנו מחפשים נקודה F שנמצאת ברביע הראשון נקבל: $y_F=4$.

מכאן נובע ששיעורי הנקודה F ברביע הראשון עבורם המרובע CEDF הוא מקבילית הם: **F (6 , 4)**.

ד. נחשב את אורך הקטע CE באמצעות הנוסחה למציאת המרחק בין הנקודות C ו־E:

$$d_{CE}=\sqrt{(x_C-x_E)^2+(y_C-y_E)^2} \rightarrow d_{CE}=\sqrt{(6-0)^2+(0-2)^2} \rightarrow d_{CE}=\sqrt{6^2+2^2}$$

$$\rightarrow d_{CE}=\sqrt{36+4} \rightarrow d_{CE}=\sqrt{40}\approx 6.32$$

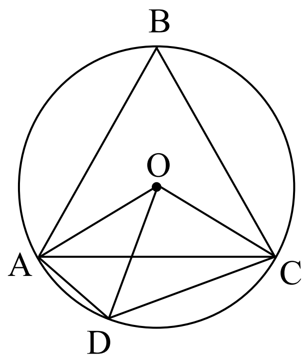
הקטע DE מונח על ציר ה־y ולכן אורך הקטע שווה להפרש בין שיעורי ה־y של נקודות הקצה D ו־E:

$$d_{DE}=y_D-y_E \rightarrow d_{DE}=6-2 \rightarrow d_{DE}=4$$

בכל מעוין 4 הצלעות שוות זו לזו באורכן.

מצאנו שהקטע CE ארוך מהקטע DE ולכן **לא קיימת** נקודה P עבורה המרובע CEDP הוא מעוין.

שאלה 5:



נתון: $\sphericalangle ACD = 20^\circ$, $\sphericalangle CAD = 40^\circ$.

א. 1. סכום זוויות במשולש שווה ל־180°. לכן במשולש ΔACD מתקיים:

$$\sphericalangle ADC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle ACD = 180^\circ \;\rightarrow\; \sphericalangle ADC + 40^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$\rightarrow\; \sphericalangle ADC = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ \;\rightarrow\; \sphericalangle ADC = 120^\circ$$

סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל שווה ל־180°. לכן במרובע ABCD מתקיים:

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ \;\rightarrow\; \sphericalangle ABC + 120^\circ = 180^\circ \;\rightarrow\; \sphericalangle ABC = 60^\circ$$

א. 2. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת. לכן מתקיים:

$$\sphericalangle ABC = 0.5 \cdot \sphericalangle AOC \;\rightarrow\; 60^\circ = 0.5 \cdot \sphericalangle AOC \;\rightarrow\; \sphericalangle AOC = 120^\circ$$

הקטעים AO ו־CO הם רדיוסים במעגל הנתון ולכן שווים באורכם. מכאן נובע ש־ΔAOC הוא משולש שווה שוקיים וזוויות הבסיס שלו שוות: $\sphericalangle CAO = \sphericalangle ACO$. סכום זוויות במשולש שווה ל־180° ולכן:

$$\sphericalangle CAO + \sphericalangle ACO + \sphericalangle AOC = 180^\circ \;\rightarrow\; \sphericalangle CAO + \sphericalangle CAO + 120^\circ = 180^\circ \;\rightarrow\; 2 \cdot \sphericalangle CAO = 60^\circ$$

$$\rightarrow\; \sphericalangle CAO = 30^\circ$$

ב. 1. נתון: AC= 6 ס"מ. המשולש ΔABC חסום במעגל ולכן נוכל להציב את הנתון החדש ואת הזווית $\sphericalangle ABC$, שמצאנו בסעיף א'1, במשפט הסינוסים במעגל, ולבודד את רדיוס המעגל R:

$$\frac{AC}{\sin \sphericalangle ABC} = 2R \;\rightarrow\; \frac{6}{\sin 60^\circ} = 2R \;\rightarrow\; 4\sqrt{3} = 2R \;\rightarrow\; R = 2\sqrt{3} \approx 3.464 \text{ ס"מ}$$

ב. 2. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת. לכן מתקיים:

$$\sphericalangle ACD = 0.5 \cdot \sphericalangle AOD \;\rightarrow\; 20^\circ = 0.5 \cdot \sphericalangle AOD \;\rightarrow\; \sphericalangle AOD = 40^\circ$$

הצלעות AO ו־DO במשולש ΔAOD הן רדיוסים במעגל הנתון ולכן האורך שלהן חושב בסעיף ב'1.
נציב את האורכים והזווית המתאימה בנוסחה לחישוב שטח משולש ונקבל:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{AO \cdot DO \cdot \sin \sphericalangle AOD}{2} \;\rightarrow\; S_{\Delta AOD} = \frac{3.464 \cdot 3.464 \cdot \sin 40^\circ}{2} \;\rightarrow\; S_{\Delta AOD} = 3.856 \text{ סמ"ר}$$

שאלה 6:

נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{8x-16}$.

א. 1. תחום ההגדרה של פונקציית שורש הוא קבוצת הערכים עבורם הביטוי שבתוך השורש אי־שלילי,
ולכן תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $0\le 8x-16 \ \rightarrow\ 16\le 8x \ \rightarrow\ 2\le x$

א. 2. חיתוך עם ציר ה־x: $f(x)=0 \ \rightarrow\ \sqrt{8x-16}=0 \ \rightarrow\ 8x-16=0 \ \rightarrow\ 8x=16 \ \rightarrow\ x=2$

לכן **נקודת החיתוך עם ציר ה־x היא: (2 , 0)**.

חיתוך עם ציר ה־y: הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=0$, ולכן **לא קיימת נקודת חיתוך עם ציר ה־y**.

ב. נגזור את הפונקציה $f(x)$ לפי הנוסחה לנגזרת שורש:

$$f(x)=\sqrt{u} \ \rightarrow\ f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$$

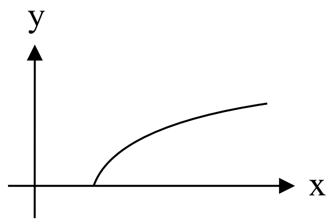
$$f(x)=\sqrt{8x-16} \ \rightarrow\ f'(x)=\frac{8}{2\sqrt{8x-16}} \ \rightarrow\ f'(x)=\frac{4}{\sqrt{8x-16}}$$

מסעיף א'1 אנו יודעים שהביטוי בשורש מוגדר **ואי־שלילי** לכל $2\le x$. כיוון שפונקציית הנגזרת היא פונקציית מנה יש להחריג מתחום ההגדרה שלה את הערך $x=2$ שמאפס את המכנה. מכאן נובע שתחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא $2<x$. בתחום זה המונה והמכנה חיוביים לכל x ולכן פונקציית הנגזרת חיובית לכל x בתחום הגדרתה $2<x$.

מצאנו שפונקציית הנגזרת $f'(x)$ **חיובית** בתחום: $2<x$, ולכן הפונקציה $f(x)$ **עולה** בכל תחום הגדרתה, כנדרש.

שימו לב! הפונקציה $f(x)$ אמנם מוגדרת גם בנקודת הקצה $x=2$ אך תחומי עלייה וירידה אינם מתייחסים לנקודות שבקצה התחום אלא רק לנקודות הפנימיות שעל הגרף.

ג. על סמך החקירה שביצענו בסעיפים א' ו־ב' מתקבל השרטוט הבא:



ד. בסעיף ב' ראינו שפונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציית מנה שהמכנה שלה מתאפס כאשר $x=2$. לכן יש לנגזרת $f'(x)$ אסימפטוטה אנכית כאשר $x=2$. אסימפטוטה זו חותכת את ציר ה־x בנקודה: **A (2 , 0)**.

ה. נמצא את שיעור ה־x של נקודת החיתוך B של הפונקציה $f(x)$ עם פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בעזרת פתרון המשוואה הבאה:

$$f(x)=f'(x) \;\rightarrow\; \sqrt{8x-16}=\frac{4}{\sqrt{8x-16}} \;\rightarrow\; \sqrt{8x-16}\cdot\sqrt{8x-16}=4 \;\rightarrow\; 8x-16=4$$

$$\rightarrow\; 8x=20 \;\rightarrow\; x=2.5$$

נמצא את שיעור ה־y של הנקודה B באמצעות הצבת שיעור ה־x שלה בפונקציה $f(x)$:

$$f(2.5)=\sqrt{8\cdot 2.5-16} \;\rightarrow\; f(2.5)=\sqrt{20-16} \;\rightarrow\; f(2.5)=\sqrt{4} \;\rightarrow\; f(2.5)=2$$

שימו לב! ניתן היה להציב את שיעור ה־x בפונקציית הנגזרת $f'(x)$ ולקבל את אותה התוצאה.

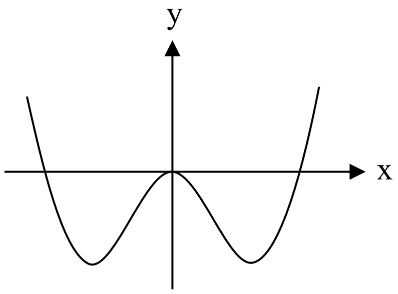
לכן, מצאנו ששיעורי הנקודה B הם: **B (2.5 , 2)**.

שאלה 7:

הפונקציות $f(x)$ ו־$f'(x)$ מוגדרות לכל x.

משמאל נתון גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ החותך את ציר ה־x בראשית הצירים, ובשתי נקודות שבאחת מהן $x=4$.

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא זוגית.



א. 1. פונקציית הנגזרת זוגית ולכן לכל x מתקיים: $f'(-x)=f'(x)$. מכאן נובע שגם עבור $x=4$:

$$f'(-4)=f'(4)$$

נתון שבאחת מנקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת עם ציר ה־x מתקיים $x=4$ ולכן: $f'(4)=0$.

לכן ביחד עם השוויון הקודם ניתן להסיק ש:

$$f'(-4)=f'(4) \;\;\rightarrow\;\; f'(-4)=0$$

מצאנו שעבור $x=-4$ פונקציית הנגזרת מתאפסת, ולכן שיעורי נקודת החיתוך השמאלית עם ציר ה־x של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הם: **(-4 ,0)**.

א. 2. על סמך הנתון בתחילת השאלה ולפי סעיף א׳1 פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מתאפסת כאשר $x=4$, $x=0$ ו־$x=-4$. לפי הגרף הנתון נוכל לקבוע ש:

- תחום **החיוביות** בו גרף הנגזרת $f'(x)$ **מעל** לציר ה־x הוא: $4<x$ או $x<-4$.
- תחום **השליליות** בו גרף הנגזרת $f'(x)$ **מתחת** לציר ה־x הוא: $0<x<4$ או $-4<x<0$.

מהקשר בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין גרף הפונקציה הנגזרת $f'(x)$ נוכל להסיק ש:

- תחום **העלייה** של $f(x)$ בו הנגזרת $f'(x)$ **חיובית** הוא: $4<x$ או $x<-4$.
- תחום **הירידה** של $f(x)$ בו הנגזרת $f'(x)$ **שלילית** הוא: $0<x<4$ או $-4<x<0$.

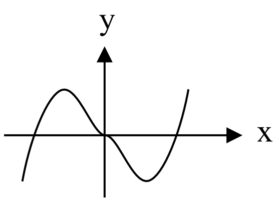
א. 3. על סמך תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ שמצאנו בסעיף א׳2 ניתן להסיק ש:

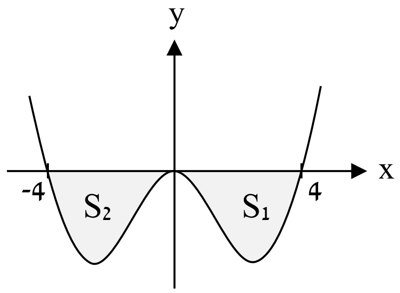
- כאשר $x=-4$ הפונקציה $f(x)$ עוברת מעלייה לירידה ולכן זו נקודת קיצון מסוג מקסימום.
- כאשר $x=4$ הפונקציה $f(x)$ עוברת מירידה לעלייה ולכן זו נקודת קיצון מסוג מינימום.

ב. בסעיף א׳2 מצאנו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

מבין האפשרויות המוצעות רק **גרף III** מתאים לחלוקה שמצאנו,

ולכן זהו גרף הפונקציה $f(x)$.





ג. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ סימטרית ולכן השטח S_1 המוגבל על ידה ועל ידי ציר ה־x מימין לציר ה־y שווה לשטח S_2 המוגבל על ידה ועל ידי ציר ה־x משמאל לציר ה־y. מכאן נובע שהשטח S_1 שווה בדיוק למחצית סכום השטחים ולכן מתקיים:

$$S_1 = \frac{12}{2} \rightarrow S_1 = 6 \text{ יח״ר}$$

ד. נבטא באמצעות הפונקציה $f(x)$ את השטחים S_1 ו־S_2:

$$S_1 = \int_0^4 (0 - f'(x))dx = \int_0^4 (-f'(x))dx = -f(x)\Big|_0^4 = -f(4) - (-f(0)) = f(0) - f(4)$$

$$S_2 = \int_{-4}^0 (0 - f'(x))dx = \int_{-4}^0 (-f'(x))dx = -f(x)\Big|_{-4}^0 = -f(0) - (-f(-4)) = f(-4) - f(0)$$

נתון שפונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא **זוגית** ולכן הפונקציה $f(x)$ היא **אי־זוגית**. מכאן נובע שלכל x מתקיים: $f(-x) = -f(x)$ ובפרט עבור $x = -4$ מתקיים: $f(-4) = -f(4)$.

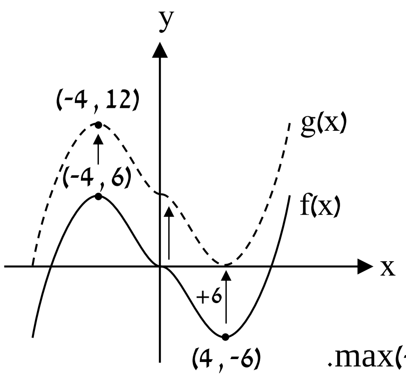
לכן עבור השטח S_2 מתקיים:

$$S_2 = f(-4) - f(0) \rightarrow S_2 = -f(4) - f(0)$$

לסיום, בסעיף ג׳ ראינו שהשטח S_1 שווה למחצית סכום השטחים ולכן שני השטחים שווים זה לזה.

מכאן נובע:

$$S_1 = S_2 \rightarrow f(0) - f(4) = -f(4) - f(0) \rightarrow f(0) = -f(0) \rightarrow 2 \cdot f(0) = 0 \rightarrow f(0) = 0$$

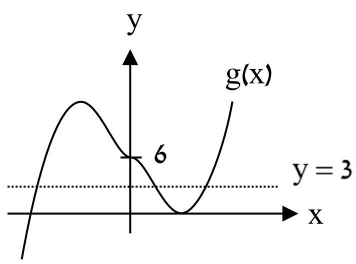


ה. נסמן בשרטוט משמאל את שיעורי ה־x של נקודות הקיצון שמצאנו בסעיף א׳3. נתון: $f(4) = -6$ ולכן שיעור ה־y של **נקודת המינימום** של הפונקציה $f(x)$ הוא 6-. הפונקציה $f(x)$ היא אי־זוגית ולכן מתקיים:

$$f(-4) = -f(4) \rightarrow f(-4) = -(-6) \rightarrow f(-4) = 6$$

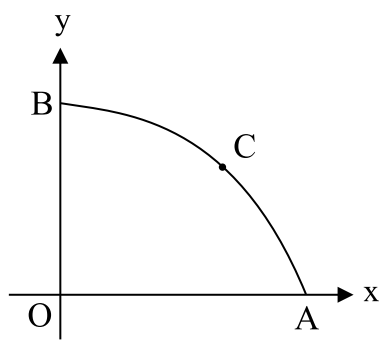
כלומר שיעור ה־y של **נקודת המקסימום** של הפונקציה $f(x)$ הוא 6.

הפונקציה $g(x) = f(x) + 6$ מתקבלת מהזזה אנכית של $f(x)$ 6 יח׳ כלפי מעלה ולכן נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הן: $\min(4, 0)$ ו־$\max(-4, 12)$.



כפי שניתן לראות בשרטוט משמאל, הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה ב־3 נקודות. לכן ניתן להסיק שלמשוואה $g(x) = 3$ יש **3 פתרונות**.

שאלה 8:



נתון גרף **חלקי** של הפונקציה: $f(x)=\frac{16}{x-8}+8$. הנקודות A ו־B

הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים, כמתואר בשרטוט.

א. כדי למצוא את שיעורי הנקודות A ו־B נמצא את שיעורי נקודות

החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

חיתוך עם ציר ה־x:

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{16}{x-8}+8=0 \;\rightarrow\; \frac{16}{x-8}=-8 \;\rightarrow\; 16=-8\cdot(x-8) \;\rightarrow\; -2=x-8 \;\rightarrow\; x=6$$

לכן שיעורי הנקודה A הם: **A (6 , 0)**.

חיתוך עם ציר ה־y:

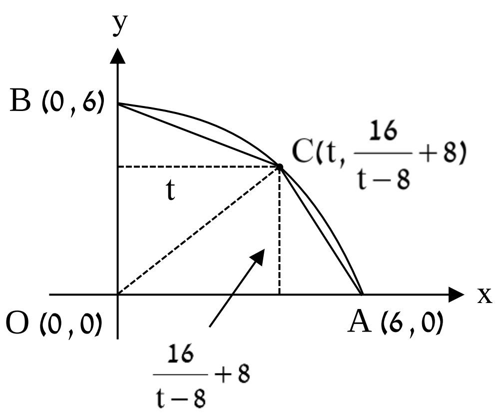
$$f(0)=\frac{16}{0-8}+8 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{16}{-8}+8 \;\rightarrow\; f(0)=-2+8 \;\rightarrow\; f(0)=6$$

לכן שיעורי הנקודה B הם: **B (0 , 6)**.

ב. 1. נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה C. כיוון שהנקודה נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ נוכל לבטא את

שיעור ה־y של הנקודה באמצעות t על ידי הצבת שיעור ה־x שלה בפונקציה $f(x)$: $f(t)=\frac{16}{t-8}+8$.

לכן שיעורי הנקודה C הם: $C(t, \frac{16}{t-8}+8)$.



במשולש ΔACO, הבסיס AO מונח על ציר ה־x ולכן אורכו

שווה להפרש בין שיעורי ה־x של נקודות הקצה A ו־O:

$$AO=x_A-x_O \;\rightarrow\; AO=6-0 \;\rightarrow\; AO=6$$

הגובה מהקודקוד C לבסיס AC שווה למרחק הנקודה C

מציר ה־x, כלומר לשיעור ה־y של הנקודה C.

הגובה הוא: $\frac{16}{t-8}+8$.

הבענו באמצעות t את אורכי הבסיס AO והגובה לצלע ונוכל להביע באמצעות t את שטח המשולש ΔACO:

$$S_{\Delta ACO}=\frac{6\cdot(\frac{16}{t-8}+8)}{2} \;\rightarrow\; S_{\Delta ACO}=3\cdot(\frac{16}{t-8}+8) \;\rightarrow\; S_{\Delta ACO}=\frac{48}{t-8}+24$$

ב. 2. במשולש ΔBCO , הצלע BO מונחת על ציר ה־y ולכן אורכה שווה להפרש בין שיעורי ה־y של נקודות הקצה B ו־O: $BO = y_B - y_O \rightarrow BO = 6 - 0 \rightarrow BO = 6$

הגובה מהקודקוד C לצלע BO שווה למרחק הנקודה C מציר ה־y, כלומר לשיעור ה־x של הנקודה C.

לכן, אורכו של גובה זה הוא t. הבענו באמצעות t את אורך הצלע BO ואת אורך הגובה היורד אליה, וכעת נביע באמצעות t את שטח המשולש ΔBCO : $S_{\Delta BCO} = \frac{BO \cdot h_2}{2} \rightarrow S_{\Delta BCO} = \frac{6 \cdot t}{2} \rightarrow S_{\Delta BCO} = 3t$

ג. נסמן ב- $s(t)$ את פונקציית המטרה המייצגת את סכום שטחי שני המשולשים שמצאנו בסעיף ב׳:

$$s(t) = S_{\Delta ACO} + S_{\Delta BCO} \rightarrow s(t) = \frac{48}{t-8} + 24 + 3t$$

נתון שהנקודה C נמצאת ברביע הראשון ולכן שיעור ה־x שלה גדול משיעור ה־x של הנקודה B אך קטן משיעור ה־x של הנקודה A. כלומר המשתנה t, המייצג את שיעור ה־x של הנקודה C, צריך להיות בטווח $0 < t < 6$ ולכן זהו תחום ההגדרה של הפונקציה $s(t)$ שמצאנו.

כעת נגזור את הפונקציה $s(t)$:

$$s'(t) = -\frac{48}{(t-8)^2} + 3$$

נשווה את הנגזרת $s'(t)$ ל־0 כדי למצוא את הנקודות החשודות כקיצון:

$$s'(t) = 0 \rightarrow -\frac{48}{(t-8)^2} + 3 = 0 \rightarrow 3 = \frac{48}{(t-8)^2} \rightarrow 3 \cdot (t-8)^2 = 48 \rightarrow (t-8)^2 = 16 \,/ \pm\sqrt{\ }$$

לאחר הוצאת השורש ישנן שתי אפשרויות.

האפשרות הראשונה היא: $t - 8 = 4 \rightarrow \cancel{t = 12}$

אך אפשרות זו נפסלת כיוון שערך ה־t נמצא מחוץ לתחום ההגדרה $0 < t < 6$.

האפשרות שנותרה היא: $t - 8 = -4 \rightarrow t = 4$

כעת נוודא את סוג הקיצון של הפונקציה $s(t)$ בעזרת טבלת עלייה וירידה. כפי שניתן לראות משמאל הנקודה שמצאנו היא אכן נקודת מקסימום.

	$4 < t < 6$	$t = 4$	$0 < t < 4$
$s'(t)$	-	מתאפסת	+
$s(t)$	↘	max	↗

לסיכום, **סכום שטחי המשולשים יהיה מקסימלי עבור $t = 4$**.

ד. סכום שטחי המשולשים מקסימלי כאשר $t = 4$ ולכן במקרה זה שיעורי הנקודה C הם: $C(4\ ,\ 4)$.

נחשב את שיפוע הישר עליו מונח הקטע CO באמצעות שיעורי הנקודות C ו־O:

$$m_{CO} = \frac{y_C - y_O}{x_C - x_O} \rightarrow m_{CO} = \frac{4-0}{4-0} \rightarrow m_{CO} = \frac{4}{4} \rightarrow m_{CO} = 1$$