

חוברת שאלות אתגר לתלמידות ולתלמידים ברמת מיומנות גבוהה - כיתה ח'

בחוברת שאלות אתגר המיועדות לתלמידות ולתלמידים ברמת מיומנות גבוהה בכיתה ח'. רמת הקושי של מרבית השאלות **גבוהה מהנדרש** בכיתה ח', והן נועדו לשיפור היכולות האלגבריות ולמציאת פתרונות יצירתיים בשאלות חשיבה. החוברת עוסקת רק בחלק מהנושאים בכיתה ח'.

מערכת משוואות

1. (*) בכל אחת ממערכת המשוואות שלפניכם מופיעה משוואה עם מכנה מספרי.

היעזרו במכנה משותף, פתרו את המערכת, והציגו את הפתרון כזוג סדור מהסוג (x, y) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+3y}{2} - \frac{x-3y}{3} = 4 \\ \frac{3x-y}{5} + \frac{2x+y}{2} = -9 \end{array} \right. \quad \text{ב.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{5} + \frac{2x-1}{3} = 5 \\ \frac{x-y}{3} + 10 = \frac{3x+y}{2} \end{array} \right. \quad \text{א.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-2y}{3} + \frac{2x+y}{5} = x-y \\ \frac{x+4y}{2} + \frac{5x-y}{3} = x+4y \end{array} \right. \quad \text{ד.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 4 \\ \frac{3x+1}{2} - \frac{5y+13}{7} = 10 \end{array} \right. \quad \text{ג.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-y}{2} - \frac{3x-2y}{3} = \frac{x}{6} - \frac{y+6}{12} \\ \frac{y-3x}{5} + 1 = \frac{11-y}{10} - \frac{y-x}{2} \end{array} \right. \quad \text{ו.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{y-3}{5} = \frac{y}{8} + \frac{x}{5} \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{x+3y}{6} \end{array} \right. \quad \text{ה.}$$

2. (***) לפניכם מערכת המשוואות: $\begin{cases} x \cdot y^2 = 50 \\ x \cdot y = 10 \end{cases}$ המספרים x ו- y חיוביים.

עדי טען: "למדנו לפתור מערכות משוואות על ידי חיבור או חיסור משוואות. כדי לפתור את המערכת הזו כדאי לחלק את המשוואות זו בזו." היעזרו בהצעתו, ופתרו את המערכת.

3. (***) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} x-y=5 \\ 3x+5y=15 \end{cases}$

מבלי למצוא את x ואת y , קבעו מהו ערכו של הסכום $x+y$, והסבירו כיצד הגעתם למסקנה זו:

- i. 3 ii. 4 iii. 5 iv. 6

4. (*) מערכות המשוואות שלפניכם מובילות למשוואה ריבועית עם משתנה אחד, שאותה ניתן לפתור על ידי פירוק לגורמים במכפלה השווה ל-0. פתרו את המערכת, והציגו את הפתרון כזוג סדור (x, y) :

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{cases} x^2 + y = 8x \\ y = 4x \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} x^2 - 2y = 5x \\ y = x \end{cases} & \text{ג. (*)} & \begin{cases} y^2 + 7x = 8y \\ y^2 + 2x = 3y \end{cases} \end{array}$$

5. (*) נתונה המשוואה $(x-5)(y-3) = 0$.

א. בלי לפתוח סוגריים, האם ניתן לדעת אילו זוגות סדורים של x ו- y פותרים את המשוואה? נמקו.

ב. היעזרו בסעיף א', ובלי לפתוח את הסוגריים פתרו את המערכת: $(x-5)(y-3) = 0$

$$\begin{cases} x + y = 12 \end{cases}$$

6. (**) המספרים x ו- y שלמים. מצאו את הזוגות (x, y) שהם פתרונות המשוואה: $(x+5)(y-4) = 6$.

7. (**) פתרו את מערכות המשוואות הבאות, והציגו את ערכי הנעלמים כזוג סדור (x, y) :

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} (2-x)(y+3) = -(x+4)(y+5) \\ (x+2)(y+5) = x(y+3) \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} (3-x)(y+5) = -(x+1)(y+2) \\ (x-5)(y+5) = (x+3)(y+1) \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ג.} & \begin{cases} \frac{x+y}{3} + \frac{3x-1}{2} = \frac{y+5}{6} \\ \frac{2x-y}{5} - \frac{3-y}{10} = \frac{4-x-y}{15} \end{cases} & \text{ד.} & \begin{cases} \frac{x+2}{2} + \frac{y+3}{3} = \frac{x+y+12}{6} \\ \frac{2x+y}{5} + \frac{3y+x}{2} = \frac{x+4y}{10} \end{cases} \end{array}$$

8. (*) נתונה מערכת המשוואות: $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

נתון שפתרונות מערכת המשוואות מייצגים את שיעורי הנקודה A וה- y של הנקודה A במערכת הצירים.

מצאו את משוואת הישר העובר דרך הנקודה A והנקודה $(5, 8)$.

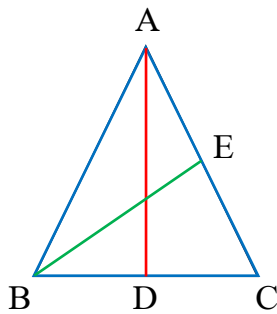
9. (**) נתונים 3 מספרים. המספר השני גדול פי שניים מהמספר הראשון וגדול ב-1 מהמספר השלישי.

ריבועו של המספר השלישי גדול פי שניים ממכפלת המספר הראשון במספר השני.

מצאו את המספר הראשון.

גיאומטריה

10. (*) המשולש $\triangle ABC$ אינו דומה למשולש $\triangle DEF$, והמשולש $\triangle MNK$ אינו דומה למשולש $\triangle DEF$.
 עופר טען: "המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle MNK$ בהכרח אינם דומים." האם הוא צודק? הסבירו.



11. (*) לפניכם המשולש שווה השוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$).

הקטע AD הוא חוצה זווית הראש.

הקטע BE הוא התיכון לצלע AC.

נתון ששטח המשולש $\triangle ABE$ הוא a.

א. הביעו באמצעות a את שטח המשולש $\triangle ABC$.

ב. נסמן: $CD = m$. הביעו את אורכו של AD בעזרת a ו-m.

12. (*) במערכת הצירים מופיע מעגל שמרכזו בראשית הצירים O, ושטחו 25π יח"ר.

המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B, C ו-D כמתואר בשרטוט.

א. מהו אורך רדיוס המעגל?

ב. מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

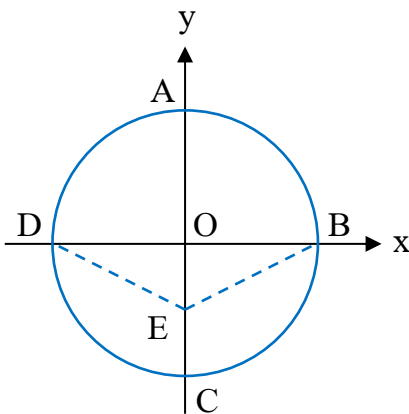
ג. הנקודה E נמצאת על הקטע CO.

הוכיחו: המשולש $\triangle BDE$ שווה שוקיים.

ד. נתון: שטח המשולש $\triangle BDE$ הוא 8 יח"ר. מצאו את:

1. שיעורי הנקודה E.

2. משוואת הישר שעליו מונח הקטע BE.



בשתי השאלות הבאות השתמשו בערך $\pi = 3.14$.

13. (*) במלבן ABCD בנו חצאי מעגלים על הצלעות AB ו-BC.

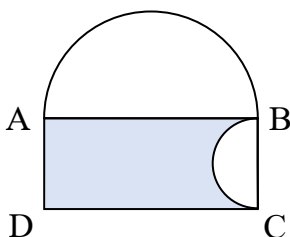
כמתואר בשרטוט. נתון: $AB = 8$ ס"מ. נסמן: $BC = 2x$.

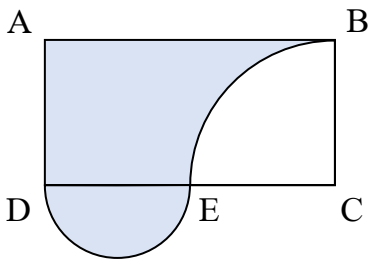
א. הביעו באמצעות x את ההיקף של:

1. האזור הכחול.

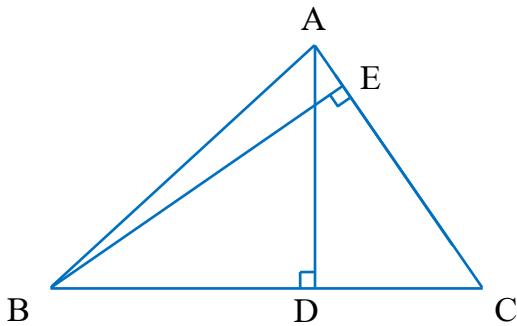
2. הצורה כולה.

ב. נתון שהיקף האזור הכחול קטן ב- 2.28 ס"מ מהיקף הצורה כולה. מצאו את x.

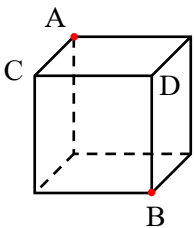




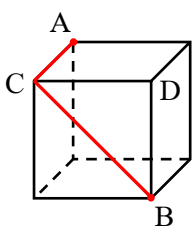
14. (**) הנקודה E היא אמצע הצלע CD במלבן ABCD.
 במלבן כלוא רבע המעגל שהרדיוסים שלו הם הקטעים BC ו-CE.
 על הקטע DE בנו חצי מעגל.
 היקף האזור הכחול ארוך ב-1.12 ס"מ מהיקף המלבן ABCD.
 חשבו את השטח הכחול.



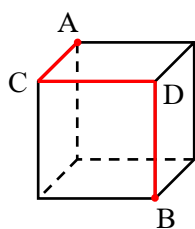
15. (**) הקטעים AD ו-BE הם גבהים במשולש ΔABC .
 הגובה BE ארוך ב-4 ס"מ מהגובה AD.
 נתון: $BC = 15$ ס"מ, $AC = 10$ ס"מ.
 חשבו את שטח המשולש ΔABC .



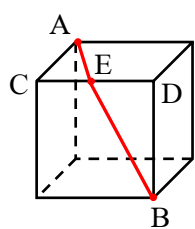
16. (*) נתונה קובייה שנפחה 8 סמ"ק. עכביש אשר נמצא בנקודה A מעוניין להגיע לנקודה B. הוא מעוניין בדרך הקצרה ביותר, ויכול ללכת רק על הפאות ועל המקצועות של הקובייה. העכביש מתלבט בין 4 מסלולים המסומנים באדום. הנקודה E היא אמצע המקצוע CD.



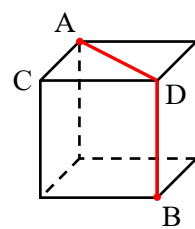
.IV



.III



.II



.I

א. ללא חישוב, הסבירו בעזרת נימוקים גיאומטריים:

1. אילו שני מסלולים שווים באורכם?

2. איזה מסלול הוא בהכרח הארוך מבין כולם?

ב. חשבו את אורכי המסלולים, מלבד המסלול מסעיף א'2, וקבעו איזה מהם הוא הקצר ביותר.

אחוזים

מס הכנסה הוא אחוז כלשהו מהמשכורת שכל עובד וכל חברה מעבירים לקופת המדינה. ככל שההכנסה של העובד **גבוהה** יותר, אחוז המס שהוא משלם **גבוה** יותר. שיטת מיסוי זו שבה אחוז המס נקבע לפי המשכורת החודשית מכונה "מדרגות המס" ומופיעה בטבלה:

מדרגת מס	הכנסה חודשית (ש"ח)	אחוז המס
1	עבור החלק מהשכר עד 7,010 ש"ח בחודש	10%
2	עבור החלק מהשכר החל מ-7,011 ש"ח ועד 10,060 ש"ח	14%
3	עבור החלק מהשכר החל מ-10,061 ש"ח ועד 16,150 ש"ח	20%
4	עבור החלק מהשכר החל מ-16,151 ש"ח ועד 22,440 ש"ח	31%

נחשב כעת את תשלום המס של סיגל ששכרה החודשי הוא 12,000 ש"ח. השכר שלה מגיע למדרגה **השלישית**. נחשב מהו סכום הכסף שיש לה בכל מדרגה בנפרד, ומהו המס עבורו.

במדרגה 1 יש לה **7,010 ש"ח** ועבורם תשלם 10% מס: $701 = 7,010 \cdot \frac{10}{100}$
 במדרגה 2 יש לה **3,049 ש"ח** $10,060 - 7,011 = 3,049$.

במדרגה זו עבור 3,049 ש"ח היא תשלם 14% מס: $426.9 = 3,049 \cdot \frac{14}{100}$
 במדרגה 3 יש לה **1,939 ש"ח** $12,000 - 10,061 = 1,939$.

במדרגה זו עבור 1,939 ש"ח היא תשלם 20% מס: $387.8 = 1,939 \cdot \frac{20}{100}$

לסיכום, לאחר חיבור שלושת התשלומים, סיגל תשלם בסך הכל 1,515.7 ש"ח.

17. (**) השכר החודשי של הילה הוא 18,000 ש"ח.

א. כמה שקלים ממשכורתה משתייכים:

1. למדרגה 1? 2. למדרגה 2? 3. למדרגה 3? 4. למדרגה 4?

ב. חשבו את סכום המס החודשי שעליה לשלם.

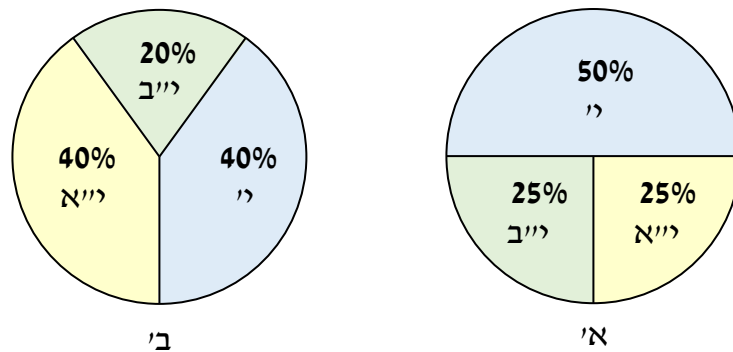
ג. בכמה יגדל סכום המס החודשי שעליה לשלם אם היא תקבל העלאה של 1,000 ש"ח לשכר?

ד. איזה אחוז מהווה סכום המס החודשי שהילה משלמת מתוך הכנסתה החודשית? הסבירו.

ה. הוצע לשנות את מנגנון תשלום המס כך שכל עובד ישלם עבור **כל שכרו** את אחוז המס המתאים למדרגה הגבוהה ביותר שאליה שכרו מגיע. האם שיטה זו משתלמת יותר עבור העובדים? נמקו.

סטטיסטיקה

18. (*) לפניכם רשימת הערכים של משתנה א': $7-2a$, $7-a$, 7 , $7+a$, $7+2a$.
 זיו טען: "אם לא ידוע לנו ערכו של a , לא נוכל לחשב את ממוצע הערכים של המשתנה."
 א. האם זיו צודק? הסבירו.
 ב. לפניכם רשימת הערכים של משתנה ב': $m-2$, $m-1$, m , $m+1$, $m+2$.
 ספיר טענה: "אם לא ידוע לנו ערכו של m , לא נוכל לחשב את ממוצע הערכים של המשתנה."
 האם היא צודקת? הסבירו.
19. (*) מנהל חברה בדק ומצא שהחציון של השכר החודשי של עובדיו הוא 7,500 ש"ח.
 לאחר מחשבה נוספת, החליט להגדיל את שכרו של כל עובד ב-1%.
 א. מה נדרש המנהל לעשות כדי להגדיל את השכר של כל עובד ב-1%?
 i. להכפיל כל שכר ב-1.1. ii. להכפיל כל שכר פי 1.01. iii. להוסיף לכל עובד 75 ש"ח.
 ב. כיצד תמליצו לו לחשב בקלות את חציון השכר החודשי המעודכן לאחר השינוי? הסבירו.
20. (*) לפניכם שתי דיאגרמות עיגול המתארות את התפלגות שכבות הלימוד בשני תיכונים:



- א. מהו המשתנה המופיע בשאלה ומהו סוג המשתנה?
 ב. האם לדעתכם דיאגרמת עיגול מתאימה לייצוג המשתנה? הסבירו.
 ג. אושרי טענה שמספר תלמידי שכבה י"ב בתיכון א' גדול ממספר תלמידי שכבה י"ב בתיכון ב'.
 האם אושרי צודקת? הסבירו את תשובתכם.
 ד. האם יתכן שבשני התיכונים מספר תלמידי שכבה י' הוא זהה? הסבירו את תשובתכם.
 ה. נתון שבתיכון ב' לומדים 440 תלמידים.
 צרו דיאגרמת עיגול והציגו בה את מספר התלמידים בכל אחת משכבות הלימוד.

21. (*) קבעו אילו מהטענות הבאות הן נכונות:

- i. אם הערכים הקיצוניים של משתנה הם מספרים איזוגיים, אז הטווח הוא מספר זוגי.
- ii. אם הערכים הקיצוניים של משתנה הם מספרים זוגיים, אז הטווח הוא מספר איזוגי.
- iii. אם נוסף למשתנה ערך נוסף, ששווה לערך הנמוך ביותר שבו, הטווח לא ישתנה.

22. (*) בכל סעיף מופיעה רשימת ערכים של משתנה כלשהו. הערכים אינם מסודרים לפי גודל:

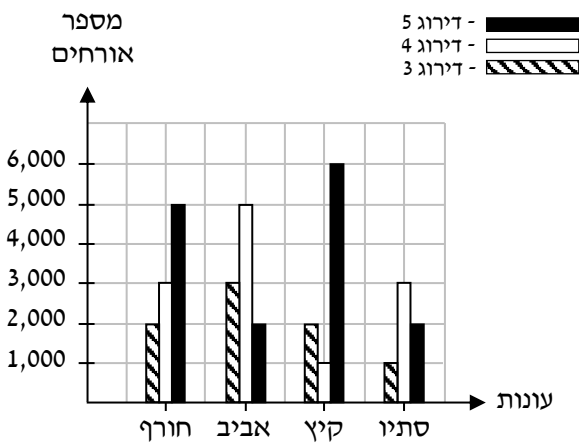
- א. מצאו את ערכי x שעבורם טווח הערכים של הרשימה: $2, 1, 9, 14, x$ יהיה 13.
- ב. מצאו את ערכי x שעבורם טווח הערכים של הרשימה: $3, -7, -5, x, -4$ יהיה 11.

23. (***) בשני המלונות - "אלמוגים" ו"השחר"

אורחים מתבקשים לדרג את שביעות הרצון שלהם מהאירוח ברמות:

3 (נמוכה), 4 (בינונית) ו-5 (גבוהה).

הנהלת מלון "אלמוגים" הציגה את הנתונים בדיאגרמת העמודות משמאל, לפי עונות השנה.



א. מהו המשתנה המוצג בציר ה-x? מהו סוג המשתנה?

ב. מהו המשתנה המוצג בציר ה-y? מהו סוג המשתנה?

ג. באילו עונות היה מספר המתארחים במלון הגבוה ביותר?

ד. חשבו את מספר האורחים הממוצע לעונה במלון.

ה. כמה אורחים דירגו את שביעות הרצון ברמה 3 לאורך השנה?

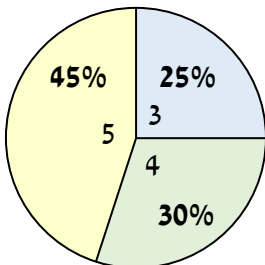
ו. מהו אחוז המדרגים ברמה 5 מבין כלל המתארחים במלון במשך השנה?

ז. הנהלת מלון "השחר" הציגה נתונים מקבילים בדיאגרמת העיגול.

מנהלת מלון "השחר" טענה: "מספר מדרגי ה-5 במלון "השחר"

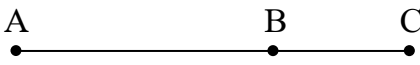
גדול ממספר מדרגי ה-5 במלון "אלמוגים".

האם היא צודקת? הסבירו.



בעיות תנועה

24. (*) רוכב אופניים נסע מהנקודה A דרך הנקודה B לנקודה C ואז חזר לנקודה B. בקטע AB הוא רכב במהירות 10 קמ"ש.



את שאר הדרך הוא נסע במהירות 15 קמ"ש. נתון: $AC = 60$ ק"מ. נסמן: $BC = x$.

א. היעזרו בטבלה, וקבעו איזה מהביטויים הבאים מייצג את משך הזמן הכולל של הרכיבה.

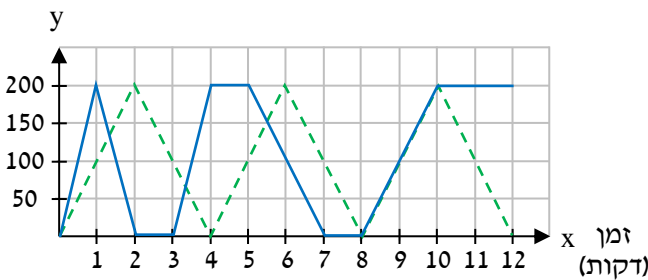
i. $\frac{60-x}{10} + \frac{x}{15}$ ii. $\frac{60-x}{10} + \frac{2x}{15}$ iii. $\frac{x+60}{10} + \frac{2x}{15}$ iv. $\frac{x-60}{10} + \frac{2x}{15}$

ב. פשטו את הביטוי שבחרתם בסעיף א' ככל הניתן.

ג. בשאלה זו יותר מתשובה אחת נכונה. לא ייתכן שמשך הזמן הכולל של רכיבתו היה:

- i. 5 שעות ii. 7 שעות iii. 4 שעות iv. 6.5 שעות

מרחק מנקודת הזינוק (מ')



25. (*) איילה ומוריה רצו במגרש הספורט הלוד

וחזרו שוב ושוב מאותו קצה של המגרש לקצהו השני ובחזרה. בשתי הדקות הראשונות של האימון עברה מוריה מרחק של 400 מ'. הגרף מציג את מרחקה של כל אחת מהן מנקודת הזינוק לאורך הזמן.

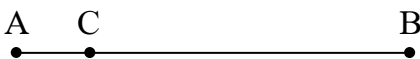
א. לאיזו מהאצניות מתאים הגרף הרציף?

ב. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה:

- i. ככל הנראה, עם התקדמות האימון איילה התעייפה.
- ii. השתיים יצאו יחד בו זמנית מנקודת הזינוק רק פעמיים.
- ג. מה היה המרחק ביניהן כאשר החלה המנוחה השנייה של מוריה?
- ד. מה המרחק שעברה כל אחת מהאצניות עד סוף הדקה ה-12?



26. (*) המרחק AB הוא 60 ק"מ. שני אחים - אצן ורוכב אופנוע -



יצאו בו זמנית מביתם בנקודה A ונעו במהירויות 5 קמ"ש

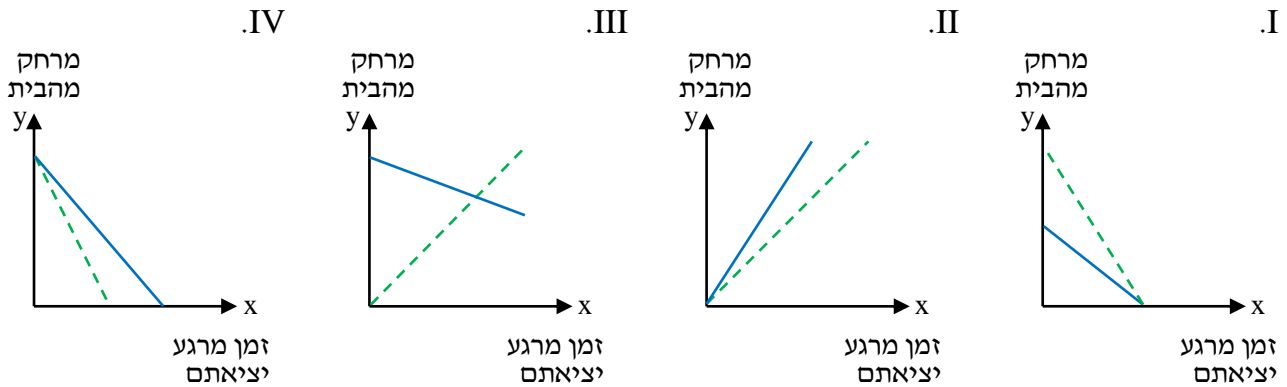
ו-35 קמ"ש בהתאמה באותו מסלול לכיוון הנקודה B.

הרוכב הגיע לנקודה B ואז הסתובב וחזר כך שפגש את אחיו האצן בנקודה C הנמצאת על המסלול.

א. חשבו את המרחק AC.

ב. האחים נפגשו בנקודה C בשעה 18:00. מצאו באיזו שעה יצאו מביתם.

27. (*) לפניכם גרפים המתארים את תנועתן של שתי אחיות רוכבות אופניים על אותו כביש ישר: תנועתה של פז מתוארת על ידי הגרף הרציף ותנועתה של לירון מתוארת על ידי הגרף המקווקו. ביום א', השתיים יצאו יחד מביתן ונסעו במהירויות שונות לבריכה. ביום ב', השתיים יצאו יחד מהבריכה ונסעו במהירויות שונות לביתן.



א. איזה גרף מתאר את תנועתן ביום א'?

ב. איזה גרף מתאר את תנועתן ביום ב'?

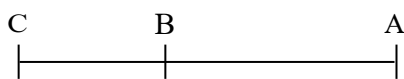
ג. קבעו מה עשוי לתאר גרף III?

i. שתיהן יצאו בו זמנית מביתן באותו הכיוון.

ii. שתיהן יצאו בו זמנית מביתן בכיוונים שונים.

iii. שתיהן יצאו בו זמנית: פז מהבית לבריכה ולירון מהבריכה הביתה.

iv. שתיהן יצאו בו זמנית: לירון מהבית לבריכה ופז מהבריכה הביתה.



28. (**) ספינה שטה בנהר הזורם מהנקודה A דרך הנקודה B

לנקודה C ובחזרה לנקודה A. המרחק AC הוא 225 ק"מ.

מהירות ההפלגה עם כיוון הזרם היא 25 קמ"ש ונגד כיוון הזרם היא 15 קמ"ש.

משך הזמן שנדרש לספינה לשוט מהנקודה A לנקודה B קצר בשעתיים מהזמן שנדרש לה לשוט

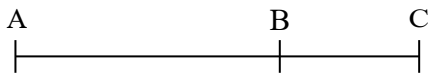
מהנקודה B לנקודה C ובחזרה לנקודה B.

א. חשבו את אורך הקטע BC.

ב. בדרך חזרה לנקודה A עברה הספינה בנקודה B בשעה 20:00.

חשבו באיזו שעה יצאה לשיט מהנקודה A.





29. (**) המרחק AC הוא 180 ק"מ.

בשעה 9:00 שגיא יצא מהנקודה A, נסע במהירות 80 קמ"ש

לנקודה C, ואז הסתובב ושב לנקודה A.

בשעה 10:00 יצא דניאל מהנקודה A ונסע במהירות 60 קמ"ש.

השניים נפגשו בנקודה B כאשר שגיא כבר היה בדרכו חזרה.

א. חשבו את המרחק BC.

ב. באיזו שעה הגיע שגיא לנקודה B בפעם השנייה?

ג. כמה דקות לפני ששגיא הגיע בחזרה לנקודה A, הגיע דניאל לנקודה C?

ערך מוחלט

דוגמה א': נפתור את המשוואה: $|5x| = 3x + 12$.

פתרון: ערכו המוחלט של $5x$ שווה ל- $3x + 12$ ולכן המרחק של $5x$ מנקודת האפס הוא $3x + 12$. כלומר, מתקיים: $5x = 3x + 12$ או $5x = -(3x + 12)$.

עבור האפשרות הראשונה נקבל: $5x = 3x + 12$ ולאחר בידוד הנעלם x נקבל: $x = 6$.

עבור האפשרות השנייה נקבל: $5x = -(3x + 12)$ ולאחר בידוד הנעלם x נקבל: $x = -1.5$.

פתרונות המשוואה הם: $x = 6$ ו- $x = -1.5$.

דוגמה ב': נפתור את המשוואה: $|x| = 3x + 8$.

פתרון: ערכו המוחלט של x שווה ל- $3x + 8$ ולכן המרחק של x מנקודת האפס הוא $3x + 8$. כלומר, מתקיים: $x = 3x + 8$ או $x = -(3x + 8)$.

עבור האפשרות הראשונה נקבל: $x = 3x + 8$ ולאחר בידוד הנעלם x נקבל: $x = -4$.

עבור האפשרות השנייה נקבל: $x = -(3x + 8)$ ולאחר בידוד הנעלם x נקבל: $x = -2$.

כעת נשים לב שעבור $x = -4$ מתקיים:

$$|x| = 3x + 8 \xrightarrow{x=-4} |-4| = 3 \cdot (-4) + 8 \rightarrow 4 = -4$$

וכיוון שזו שגיאה נסיק שפתרון זה אינו מקיים את המשוואה המקורית ולכן הוא נפסל.

מכאן נובע שלמשוואה פתרון יחיד והוא: $x = -2$.

חשוב! כאשר במשוואה עם ערך מוחלט הנעלם מופיע גם בתוך הערך המוחלט וגם מחוץ לו, עלינו לבדוק את התאמת התשובות למשוואה המקורית, ובמידת הצורך לפסול פתרון.

30. (*) פתרו את המשוואות:

א. $|7x| = x^2 + 8x$ ב. $|9x| = x^2 + 5x$ ג. $|x^2 + 3x| = 5x$

31. (*) מצאו את המספרים שמרחקם מהמספר 7 גדול פי שניים ממרחקם מהמספר 13.

32. (**) פתרו באופן גרפי את אי-השוויונות:

א. $|2x - 1| < |x - 5|$ ב. $|-x + 3| < |3 - 2x|$ ג. $|4x - 4| \leq 0$

33. (**) פתרו את המשוואות הבאות :

$$\text{א. } |x-1|-2=1 \quad \text{ב. } |10-x|=3 \quad \text{ג. } |3-x|+|3x-9|+|6-2x|=0$$

34. (**) המספרים a ו-b שונים אך אינם ידועים. לא ידוע איזה מהם גדול יותר.

דניאל מעוניין לכתוב ביטוי אלגברי שיהיה שווה בערכו למספר הגדול מהשניים, והציע שני ביטויים :

$$\text{i. } \frac{|a+b|+|a-b|}{2} \quad \text{ii. } \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

א. הציבו בביטויים שני מספרים חיוביים a ו-b שתבחרו.

האם בעזרת ההצבה תוכלו לקבוע עבור כל ביטוי אם הוא מתאים? הסבירו.

ב. בחרו שני מספרים : אחד חיובי ואחד שלילי, שסכומם **חיובי**. הציבו אותם בשני הביטויים.

האם בעזרת ההצבה תוכלו לקבוע עבור כל ביטוי אם הוא מתאים? הסבירו.

ג. האם על סמך שני הסעיפים הקודמים ניתן לקבוע ששני הביטויים מתאימים? הסבירו.

ד. בחרו שני מספרים **שליליים**. הציבו אותם בשני הביטויים.

1. האם ניתן לקבוע שאחד מהביטויים אינו מתאים? הסבירו.

2. האם ניתן לקבוע שהביטוי האחר בהכרח מתאים? הסבירו.

35. (**) פתרו את המשוואות הבאות :

$$\text{א. } \left| \frac{x+1}{3} + \frac{x}{2} + x \right| = 3-x \quad \text{ב. } \left| \frac{x+3}{5} - \frac{x}{2} - 2x \right| = \left| \frac{x-2}{10} - x + 6 \right|$$

36. (**) נגדיר את הפעולה החשבונית : $P(x,y) = |x-y|$

עבור כל טענה קבעו אם היא בהכרח נכונה או שקיימים ערכים שעבורם היא שגויה :

$$\text{i. } P(x,y) = P(y,x)$$

$$\text{ii. } P(x,0) = x$$

$$\text{iii. } P(x,-x) = 2|x|$$

$$\text{iv. } P(0,y) = y$$

שאלות חקר אלגברי

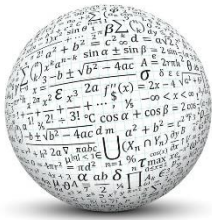
37. (*) תכונת ההתחלקות במספר 3 היא: "מספר מתחלק ב-3 אם סכום ספרותיו מתחלק ב-3".
 בשאלה זו נוכיח את התכונה עבור מספרים **תלת-ספרתיים**.
- א. נתון מספר שספרת המאות שלו היא a , ספרת העשרות שלו היא b , וספרת האחדות שלו היא c . הביעו באמצעות a , b ו- c את ערכו של המספר.
- ב. נתן טען שניתן להציג את ערך הביטוי באופן זה: $99a + 9b + (a + b + c)$.
- האם הוא צודק?
 - היעזרו בסעיף ב' 1, והראו שתכונת ההתחלקות ב-3 מתקיימת עבור כל מספר תלת-ספרתי.
 - עוז טען: "בעזרת הביטוי שנתן כתב ניתן להוכיח שמספר תלת-ספרתי מתחלק ב-9 אם סכום ספרותיו מתחלק ב-9". האם הוא צודק? הסבירו.

38. (*) רונה הבחינה בחוקיות המתקיימת בין שלשות של מספרים טבעיים עוקבים:

עבור המספרים 5, 6 ו-7 מתקיים: $7^2 - 5^2 = 4 \cdot 6$

עבור המספרים 6, 7 ו-8 מתקיים: $8^2 - 6^2 = 4 \cdot 7$

עבור המספרים 7, 8 ו-9 מתקיים: $9^2 - 7^2 = 4 \cdot 8$



- א. מבלי לבצע חישוב כלשהו מצאו את a : $101^2 - 99^2 = 4 \cdot a$.
- ב. היעזרו בחוקיות הזו, והשלימו במחברת את החסר:

$$201^2 - 199^2 = \square \cdot \square$$

$$\square^2 - \square^2 = 4 \cdot 300$$

$$\square^2 - \square^2 = 4 \cdot 1,000$$

- ג. עמית מעוניינת להוכיח שחוקיות זו מתקיימת עבור כל שלושה מספרים שלמים עוקבים.
- היעזרו ב"ו, וכתבו ביטויים אלגבריים המייצגים שלושה מספרים כאלו שהקטן ביניהם הוא n .
 - הראו שהחוקיות מתקיימת עבור שלושת הביטויים שמצאתם.

39. (*) בר הבחין בחוקיות המתקיימת בין רביעיות של מספרים שלמים עוקבים :

$$2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2 \quad \text{עבור המספרים } 1, 2, 3, 4 \text{ מתקיים:}$$

$$6 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = 2 \quad \text{עבור המספרים } 5, 6, 7, 8 \text{ מתקיים:}$$

$$21 \cdot 22 - 20 \cdot 23 = 2 \quad \text{עבור המספרים } 20, 21, 22, 23 \text{ מתקיים:}$$

א. נסחו את החוקיות במילים.

ב. היעזרו בחוקיות זו, והשלימו את החסר במחברת **ללא חישוב** :

$$10 \cdot \square - 9 \cdot 12 = 2$$

$$14 \cdot 15 - 13 \cdot 16 = \square$$

$$16 \cdot 17 - \square \cdot \square = 2$$

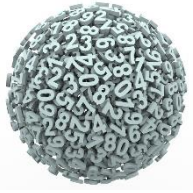
$$1,001 \cdot 1,002 - 1,000 \cdot \square = 2$$

ג. בר מעוניין להוכיח שחוקיות זו מתקיימת עבור **כל** ארבעה מספרים שלמים עוקבים.

1. היעזרו ב"ג", וכתבו ביטויים אלגבריים המייצגים ארבעה מספרים כאלו שהקטן ביניהם

הוא n.

2. הראו שהחוקיות מתקיימת עבור ארבעת הביטויים שמצאתם.



תשובות:

1) א. (5, 5) . ב. (-6, 2) . ג. (9, 3) . ד. למערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות. בגלל ששתי המשוואות שקולות, כל זוג של x ו- y שמתאים למשוואה $x = 2y$ פותר את שתיהן.
ה. (0, 8) . ו. (-3, -4)

2) (2, 5)

3) iii. ניתן למצוא זאת על ידי חיבור שתי המשוואות, וחילוק המשוואה המתקבלת ב-4.

4) א. (0, 0), (4, 16) . ב. (0, 0), (7, 7) . ג. (0, 0), (1, 1)

5) א. כן. מכפלה שווה ל-0 אם לפחות אחד מהגורמים שווה ל-0. כלומר, הערכים המאפשרים את המכפלה הם $x = 5$ או $y = 3$. הזוגות הסדורים של ערכי x ו- y הפותרים את המשוואה הם כל זוג סדור שערך ה- x שלו הוא $x = 5$ וכל זוג סדור שערך ה- y שלו הוא $y = 3$. יש אינסוף זוגות סדורים כאלו.
ב. (5, 7), (9, 3)

פתרון מלא:

סעיף א': כן. מכפלה שווה ל-0 אם לפחות אחד מהגורמים שווה ל-0. כלומר, הערכים המאפשרים את המכפלה הם $x = 5$ או $y = 3$. לכן ערכי x ו- y הפותרים את המשוואה הם כל זוג סדור שערך ה- x שלו הוא $x = 5$ וכל זוג סדור שערך ה- y שלו הוא $y = 3$.

סעיף ב': בסעיף א' ראינו שהמשוואה העליונה מתקיימת כאשר $x = 5$ או $y = 3$. אם $x = 5$ אז מהמשוואה השנייה נסיק ש: $y = 7$, ואילו אם $y = 3$ אז מהמשוואה השנייה נסיק ש: $x = 9$. כלומר פתרונות המערכת הם: (5, 7), (9, 3).

6) (-3, 7), (-2, 6), (-8, 2), (-7, 1), (-4, 10), (1, 5), (-11, 3), (-6, -2)

פתרון מלא:

כיוון ש- x ו- y שלמים, גם המספרים $x + 5$ ו- $y - 4$ הם בהכרח מספרים שלמים.

כלומר אנו מחפשים מכפלה של שני מספרים שלמים ששווה ל-6. הזוגות האפשריים הם:

(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1), (-1, -6), (-2, -3), (-3, -2), (-6, -1)

אם $x + 5 = 1$ ו- $y - 4 = 6$ אז: $x = -4$ ו- $y = 10$

אם $x + 5 = 2$ ו- $y - 4 = 3$ אז: $x = -3$ ו- $y = 7$

אם $x + 5 = 3$ ו- $y - 4 = 2$ אז: $x = -2$ ו- $y = 6$

אם $x + 5 = 6$ ו- $y - 4 = 1$ אז: $x = 1$ ו- $y = 5$

אם $x + 5 = -1$ ו- $y - 4 = -6$ אז: $x = -6$ ו- $y = -2$

אם $x + 5 = -2$ ו- $y - 4 = -3$ אז: $x = -7$ ו- $y = 1$

אם $x + 5 = -3$ ו- $y - 4 = -2$ אז: $x = -8$ ו- $y = 2$

אם $x + 5 = -6$ ו- $y - 4 = -1$ אז: $x = -11$ ו- $y = 3$

לסיכום, מצאנו שהפתרונות השלמים של המשוואה הם הזוגות הסדורים:

(-3, 7), (-2, 6), (-8, 2), (-7, 1), (-4, 10), (1, 5), (-11, 3), (-6, -2)

(7) א. $(-1, -4)$. ב. $(3, -2)$. ג. $(1, -3)$. ד. $(0, 0)$.

(8) $y = 3x - 7$.

(9) 0.25 .

(10) עופר טועה. לדוגמה, אם המשולש $\triangle ABC$ חופף ל- $\triangle MNK$ אז הם דומים עם יחס דמיון 1:1, אך שניהם אינם דומים למשולש $\triangle DEF$.

(11) א. $2a$. ב. $AD = \frac{2a}{m}$.

(12) א. 5 יח' . ב. $A(0, 5), B(5, 0), C(0, -5), D(-5, 0)$. ד. 1 . E $(0, -1.6)$. 2. $y = 0.32x - 1.6$.

(13) א. 1. $16 + 5.14x$. 2. $20.56 + 4x$. ב. $x = 2$.

(14) 102.88 סמ"ר .

(15) 60 סמ"ר .

(16) א. 1. מסלולים I ו-IV שווים באורכם. זאת כי שניהם מורכבים מאורך של מקצוע הקובייה, ומאורך של אלכסון של אחת מפאות הקובייה. 2. מסלול III הוא בהכרח הארוך מבין כולם. זאת כי הוא מורכב מאורכים של שלוש מקצועות של קובייה, בעוד שאר המסלולים מורכבים מאורך של מקצוע קובייה, ואורך הקצר באורכו מאורכים של שתי מקצועות. ב. מסלול I: 4.83 ס"מ. מסלול II: 4.47 ס"מ. מסלול IV: 4.83 ס"מ. המסלול הקצר ביותר הוא מסלול II.

(17) א. 1. 7,010 ש"ח. 2. 3,049 ש"ח. 3. 6,089 ש"ח. 4. 1,849 ש"ח. ב. 2,918.9 ש"ח. ג. 310 ש"ח.

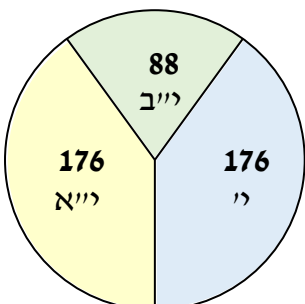
ד. כ-16.22%. ה. אם ניקח את רמת המס הגבוהה עבור כל המשכורת אז יגבה אחוז גבוה יותר מכל השכר, בעוד שאם נחשב לפי שיטת המדרגות, עבור המדרגות התחתונות יידרש תשלום מס נמוך יותר.

(18) א. זיו טועה. בחישוב הממוצע הפרמטר a מצטמצם ומקבלים שהממוצע שווה ל-7. ב. ספיר צודקת.

בחישוב הממוצע כל הערכים המספריים השונים מ- m מצטמצמים, ומקבלים שהממוצע שווה ל- m . כל עוד m אינו ידוע, לא נדע מהו הממוצע.

(19) א. ii. ב. החציון החדש הוא 7,575 ש"ח, והוא מתקבל מהכפלת החציון הישן פי 1.01.

(20) א. המשתנה הוא שכבת הלימוד וסוג המשתנה הוא שמי. ב. כן. מדובר על מספר קטן של קטגוריות (3 שכבות) והבדלי הגודל המשמעותיים בין השכבות ניכרים ויזואלית בפערי הגודל בין הגזרות של העיגול. ג. אושרי טועה. הגזרה שמייצגת את שכבת י"ב בתיכון א' והגזרה שמייצגת את שכבת י"ב בתיכון ב' מציגות כל אחת את החלק היחסי של תלמידי השכבה מקרב כלל התלמידים באותו התיכון. הדיאגרמות אינן מציגות את המספר המדויק של התלמידים. לכן, כאשר מדובר בתיכונים בגדלים שונים לא ניתן להשוות בין שתי הדיאגרמות והטענה שגויה. ד. המצב ייתכן כאשר כמות של 50% מתלמידי תיכון א' תהיה שווה לכמות של 40% מתלמידי תיכון ב'. לדוגמה, אילו בתיכון א' 200 תלמידים ובתיכון ב' 250 תלמידים אז בשני המקרים בשכבת י' יהיו 100 תלמידים כך שמספרם יהיה זהה. ה. הדיאגרמה משמאל.



(21) i, iii.

(22) א. $x = 1$ או $x = 14$. ב. אף x . הטווח המינימלי עבור רשימת ערכים זו הוא 12.

(23) א. עונת השנה; סוג המשתנה הוא שמי. ב. מספר האורחים; סוג המשתנה הוא כמותי בדיד.

ג. מספר האורחים הגבוה ביותר התקבל בעונות החורף והאביב. ד. 8,750. ה. 8,000.

ו. 42.86%. ז. לא ניתן לקבוע. הנתונים שהוצגו בדיאגרמת העיגול הם יחסיים ולכן תלויים במספר

האורחים שהיו במלון בסך הכל. ללא שידוע לנו מספר האורחים הכולל במלון "השחר" לא ניתן

לקבוע אם המדרגים 5 מתוכם הם יותר או פחות מ-15,000 מדרגי ה-5 במלון "אלמוגים".

(24) א. ii. ב. $\frac{180+x}{30}$. ג. i-iii.

(25) א. מוריה. ב. i. שגויה. ii. נכונה. ג. 200 מ'. ד. מוריה: 1,000 מ'; איילה: 1,200 מ'.

(26) א. 15 ק"מ. ב. 15:00.

(27) א. II. ב. IV. ג. iv.

(28) א. 75 ק"מ. ב. 6:00.

(29) א. 60 ק"מ. ב. 12:00. ג. 30.

(30) א. $x = -15, x = 0$. ב. $x = -14, x = 4, x = 0$. ג. $x = 2, x = 0$.

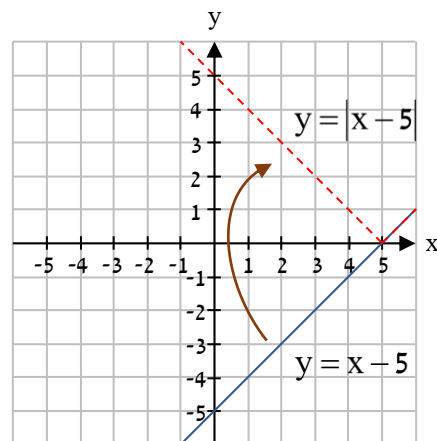
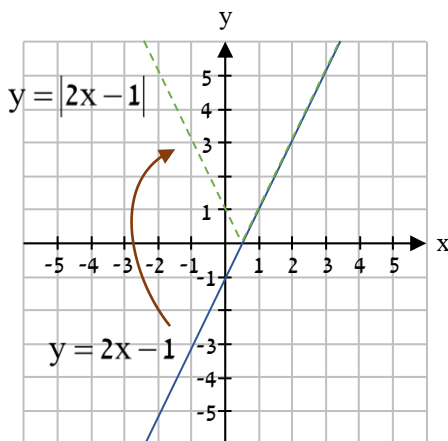
(31) $x = 19, x = 11$.

(32) א. $-4 < x < 2$. ב. $2 < x$ או $x < 0$. ג. $x = 1$.

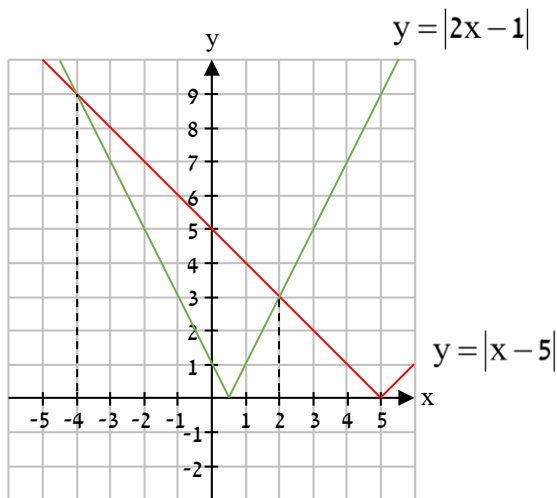
פתרון סעיף א': ראשית נצייר במערכות צירים נפרדות את הגרפים של הפונקציות $|x - 5|$ ו- $|2x - 1|$.

בשני המקרים נתחיל משרטוט של הישר המתקבל לאחר השמטת הערך המוחלט, ולאחר מכן נבצע שיקוף כלפי מעלה של החלק השלילי שנמצא מתחת לציר ה-y כדי לקבל גרף פונקציית הערך

המוחלט:



כעת נמקם את שני הגרפים שמצאנו על אותה מערכת צירים :



בשרטוט ניתן לראות שהגרפים נחתכים בנקודות ששיעורי ה־x שלהן : 2 ו־4.

התחום שבו גרף הפונקציה $|2x - 1|$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה $|x - 5|$ הוא בין שתי נקודות חיתוך אלו, ולכן הפתרון של אי השוויון הוא : $-4 < x < 2$.

(33) א. $x = 0, x = -2, x = 2, x = 4$. ב. $x = -7, x = 7, x = -13, x = 13$. ג. $x = 3$.

פתרון סעיף א' : משמעות השוויון : $|x - 1| - 2 = 1$ היא שמרחקו של הביטוי $|x - 1| - 2$ מהאפס הוא

1. מכאן נובע שקיימות שתי אפשרויות : $|x - 1| - 2 = 1$ או $|x - 1| - 2 = -1$. מהאפשרות הראשונה

נקבל את השוויון : $|x - 1| = 3$, ומהשנייה נקבל את השוויון : $|x - 1| = 1$.

- משמעות השוויון הראשון היא שמרחקו של הביטוי $x - 1$ מהאפס הוא 3. מכאן נובע שקיימות שתי אפשרויות : $x - 1 = 3$ או $x - 1 = -3$, ולכן שני ערכי ה־x האפשריים יהיו : $x = 4$ ו־ $x = -2$.
- משמעות השוויון השני היא שמרחקו של הביטוי $x - 1$ מהאפס הוא 1. מכאן נובע שקיימות שתי אפשרויות : $x - 1 = 1$ או $x - 1 = -1$, ולכן שני ערכי ה־x האפשריים יהיו : $x = 2$ ו־ $x = 0$.

לסיכום, מצאנו שפתרונות המשוואה האפשריים הם : $x = 0, x = -2, x = 2, x = 4$.

פתרון סעיף ג' :

כל אחד מהמחוברים באגף שמאל נמצא בתוך ערך מוחלט, ולכן הוא אי־שלילי. סכום של שלושה מספרים אי־שליליים שווה לאפס אך ורק כאשר כל אחד מהמחוברים שווה לאפס. נבדוק מתי כל אחד מהמחוברים מתאפס, ואם קיים ערך משותף המאפס את שלושתם :

$$|3 - x| = 0 \rightarrow 3 - x = 0 \rightarrow x = 3$$

$$|3x - 9| = 0 \rightarrow 3x - 9 = 0 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$$

$$|6 - 2x| = 0 \rightarrow 6 - 2x = 0 \rightarrow 6 = 2x \rightarrow x = 3$$

מצאנו שאכן קיים ערך x משותף שעבורו שלושת הביטויים השונים מתאפסים, ולכן ערך זה הוא

הפתרון של המשוואה. כלומר פתרון המשוואה : $|3 - x| + |3x - 9| + |6 - 2x| = 0$ הוא : $x = 3$.

(34) א. עבור צמד מספרים חיוביים שני הביטויים מתאימים. ב. עבור צמד המורכב ממספר חיובי וממספר שלילי שני הביטויים מתאימים. ג. לא ניתן. לא בדקנו עבור צמד מספרים שסכומם שלילי

או עבור צמד מספרים שליליים. **ד. 1.** ביטוי i אינו מתאים. **2.** לא ניתן. לא בדקנו עבור צמד מספרים שסכומם שלילי.

פתרון מורחב לסעיף ג': הבדיקות שבוצעו בסעיפים א' ו-ב' אינן מספיקות כיוון שכל אחת מהן בוצעה עבור זוג מסוים שנבחר ולא עבור כל הזוגות האפשריים. כמו כן הבדיקות שבוצעו לא התייחסו למקרה שבו הסכום של צמד המספרים הוא שלילי או עבור צמד מספרים שליליים, ולכן הן אינן ממצות, ולא ניתן לקבוע על פיהן אם אחד מבין שני הביטויים מתאים.

$$(35) \text{ א. } x = -4, x = \frac{16}{17} \text{ ב. } x = 2, x = -3\frac{5}{7}$$

(36) **i.** בהכרח נכונה. **ii.** קיימים ערכים שעבורם היא שגויה: אינה מתקיימת עבור ערכי x שליליים.

iii. בהכרח נכונה. **iv.** קיימים ערכים שעבורם היא שגויה: אינה מתקיימת עבור ערכי y שליליים.

(37) **א.** $100a + 10b + c$. **ב. 1.** נתן צודק. כינוס איברים בביטוי שהציע, יוביל חזרה לביטוי שמצאנו בסעיף א', ולכן שני הביטויים שקולים. **2.** ניתן להסתכל על הביטוי שהציע נתן בתור סכום של 3 מחוברים. המחובר הראשון הוא $99a$, והוא מתחלק ב-3 כיוון ש-99 מתחלק ב-3. המחובר השני הוא $9b$, והוא מתחלק ב-3 כיוון ש-9 מתחלק ב-3. המחובר השלישי הוא $(a + b + c)$, והוא מתחלק ב-3 אם הסכום של a, b ו- c מתחלק ב-3. מכאן נובע שאם סכום a, b ו- c מתחלק ב-3, אז הביטוי $(a + b + c) + 99a + 9b$ שהציע נתן מורכב כולו ממחברים שמתחלקים ב-3, ולכן הוא עצמו מתחלק ב-3. כלומר אם סכום a, b ו- c מתחלק ב-3, אז המספר התלת-ספרתי $100a + 10b + c$ שספרותיו הן a, b ו- c מתחלק ב-3. **ג.** עוז צודק. התשובה דומה לתשובה בסעיף הקודם. המחובר הראשון הוא $99a$, והוא מתחלק ב-9 כיוון ש-99 מתחלק ב-9. המחובר השני הוא $9b$, והוא מתחלק ב-9. המחובר השלישי הוא $(a + b + c)$, והוא מתחלק ב-9 אם ידוע לנו שהסכום של a, b ו- c מתחלק ב-9. כלומר, הביטוי שהציע נתן מורכב כולו ממחברים שמתחלקים ב-9, ולכן הוא עצמו מתחלק ב-9.

(38) **א.** $a = 100$. **ב.** שורה ראשונה: $4 \cdot 200$; שורה שנייה: $301^2 - 299^2$; שורה שלישית: $1,001^2 - 999^2$.

ג. 1. $n, n + 1, n + 2$. **2.** נציג את החוקיות באופן הבא: $(n + 2)^2 - n^2 = 4(n + 1)$. כעת נראה שהיא מתקיימת. נקבל: $(n + 2)^2 - n^2 = (n + 2)(n + 2) - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4 = 4(n + 1)$

מצאנו ששני הביטויים שווים, ולכן השוויון המבוקש מתקיים, והטענה נכונה.

(39) **א.** עבור ארבעה מספרים שלמים עוקבים, ההפרש בין מכפלת שני המספרים האמצעיים למכפלת המספר הראשון ברביעי שווה ל-2.

ב. $14 \cdot 15 - 13 \cdot 16 = 2$, $10 \cdot 11 - 9 \cdot 12 = 2$, $16 \cdot 17 - 15 \cdot 18 = 2$, $1,001 \cdot 1,002 - 1,000 \cdot 1,003 = 2$

ג. 1. $n, n + 1, n + 2, n + 3$. **2.** עבור כל 4 מספרים טבעיים עוקבים: $n, n + 1, n + 2, n + 3$ נציג את החוקיות באופן הבא: $(n + 1)(n + 2) - n(n + 3) = 2$. כעת עלינו להראות שהיא מתקיימת.

נפתח את הסוגריים, ונכנס איברים: $n^2 + 3n + 2 - n^2 - 3n = 2$. מצאנו שהביטוי האלגברי אכן שווה ל-2, ולכן השוויון המבוקש מתקיים, והטענה נכונה.