גיאומטריה משולבת - אוקלידית ואנליטית - לסיכום כיתה ט'

חוברת תרגול זו של ארכימדס הוכנה בהתאם **לדגשי ההוראה העדכניים של תכנית הלימודים לכיתה ט'**, וכהכנה ללמידה לפי תוכנית הלימודים החדשה בכיתה י' ברמת 4 יחידות לימוד (שאלון 471).
החוברת משלבת נושאי גיאומטריה אוקלידית עם גיאומטריה אנליטית במערכת הצירים.

חוברת זו היא הפרק האחרון בספר **חטיבון ט' (מהדורת 2024)** של הוצאת ארכימדס, אשר הותאם לדגשים העדכניים בתוכנית הלימודים של כיתה ט', וכולל בין היתר גם פרקים מקיפים בנושאים קדם אנליזה, פרבולה, אוריינות וקריאת גרפים.
בספר שאלות גיאומטריה מדורגות, סעיפי חשיבה ואחרים.

למידע על ספר התרגול חטיבון ט' : https://bit.ly/3Opz6Qz

הזמנה מרוכזת בפנייה ל"יש הפצות" באחת מהדרכים הבאות:
- בווטסאפ: 052-2285566
- במייל yeshbooks@gmail.com
- באתר https://bit.ly/3FQfqBy

להזמנת **ספר הביתה עם שליח**: https://bit.ly/3WY8k7H .

שאלות המשלבות גיאומטריה אוקלידית וגיאומטריה אנליטית במערכת הצירים

משוואת הישר וישרים מקבילים

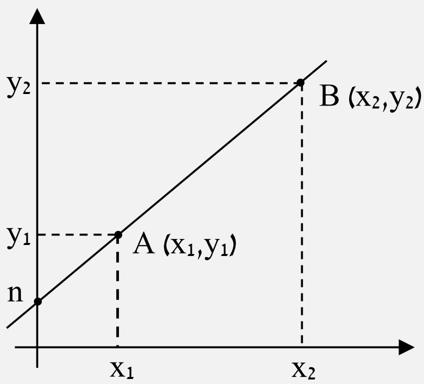
שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $A(x_1,y_1)$ ו- $B(x_2,y_2)$

הוא : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

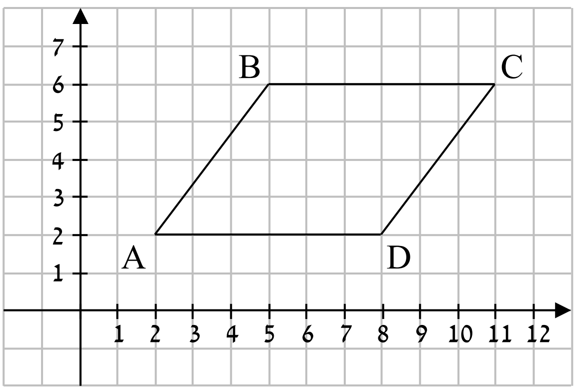
משוואת הישר ששיפועו m אשר חותך את ציר ה-y

בנקודה $(0,n)$ היא : $y = m\cdot x + n$.

כאשר שני ישרים **מקבילים**, שיפועיהם שווים : $m_1 = m_2$.



1. לפניכם המרובע ABCD במערכת הצירים.



א. אייל טען :
"אם נחשב את שיפועי הישרים עליהם
מונחות הצלעות AB ו- CD, נוכל לבדוק
אם הן מקבילות זו לזו".
האם אייל צודק? הסבירו את תשובתכם.

ב. הראו שמתקיים : $AB||CD$.

ג. כיצד ניתן להסיק שמתקיים $BC||AD$?

ד. איזה סוג מרובע הוא ABCD? הסבירו.

2. בכל סעיף מופיעים קודקודים של מרובע. היעזרו בשיפועי הישרים עליהם מונחות הצלעות וקבעו אם המרובע הוא מקבילית, טרפז או שאינו מקבילית ואינו טרפז.

א. $A(0,-1)$, $B(-2,-1)$, $C(0,2)$, $D(2,2)$

ב. $A(20,20)$, $B(21,22)$, $C(23,21)$, $D(21,20)$

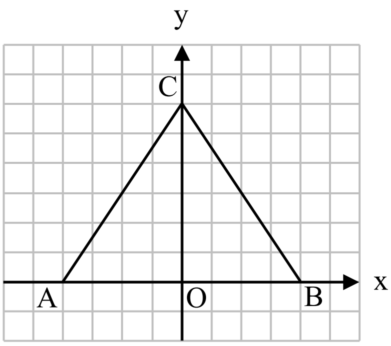
ג. $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(1,-3)$, $D(-4,-3)$

תשובות: 1) א. אייל צודק. אם השיפועים יהיו שווים, הצלעות תהיינה מקבילות. **ג.** ניתן לחשב את שיפועי הישרים BC ו-AD ולראות ששניהם שווים ל-0. כך ניתן להסיק ש- $BC||AD$. **ד.** המרובע ABCD הוא מקבילית. **2) א.** מקבילית. **ב.** אינו מקבילית ואינו טרפז. **ג.** טרפז.

משולשים חופפים במערכת הצירים - שלב קדם דדוקטיבי

בשאלות הבאות נשתמש בתכונות של משולשים חופפים בצורות המופיעות במערכת הצירים.
יש לזכור שבמערכת הצירים נמדוד את אורכם של קטעים בעזרת יחידות אורך, ולא בעזרת סנטימטרים או יחידות מידה מהמציאות. שטח נמדד על ידי יחידות ריבועיות, או בקיצור יח"ר.

תזכורת! הצירים מאונכים זה לזה.



1. הנקודות A, B ו־C נמצאות על הצירים כמתואר בשרטוט.
ראשית הצירים בנקודה O. נתון: $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $C(0,6)$.

א. לפי איזה משפט חפיפה ניתן להסיק ש: $\Delta AOC \cong \Delta BOC$?

ב. עבור כל טענה קבעו אם ניתן להסיק אותה מהחפיפה:

i. $\sphericalangle CAO = \sphericalangle CBO$

ii. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC$

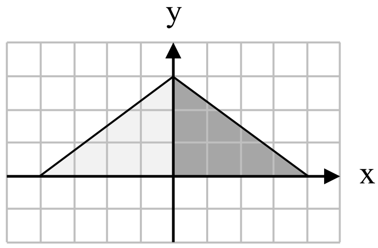
iii. $AC = BC$

ג. ספיר טענה: "גם אם הנקודה C הייתה נמצאת גבוה יותר על ציר ה־y, ולא היינו יודעים מהו שיעור ה־y שלה, יכולנו להראות שהמשולשים חופפים." האם היא צודקת? הסבירו.

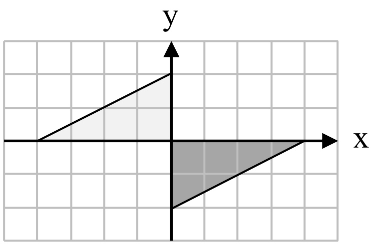
ד. חשבו את שטח המשולש ΔABC .

2. היעזרו במשבצות, וקבעו אם שני המשולשים בשרטוט חופפים. אם כן, ציינו את משפט החפיפה:

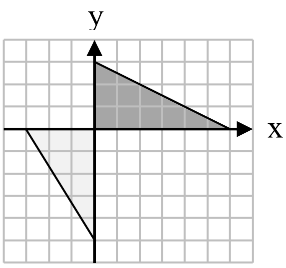
א.



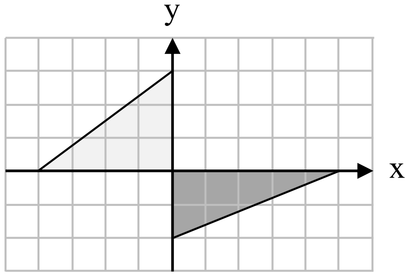
ב.



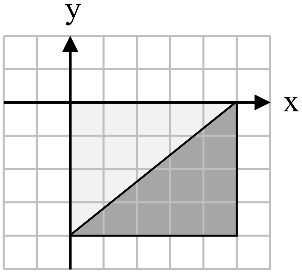
ג.



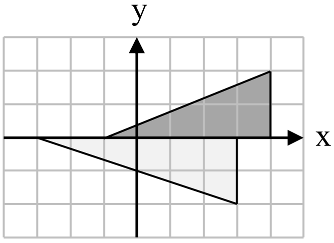
ד.



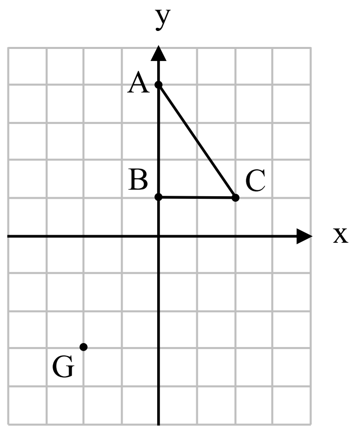
ה.



ו.



3. במערכת הצירים מופיע משולש שקודקודיו $A(0,4)$, $B(0,1)$ ו־$C(2,1)$.



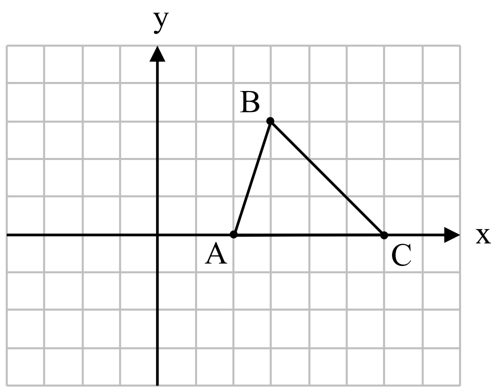
א. מצאו נקודה D ברביע **הראשון**, כך שהמשולש ΔACD שיתקבל יהיה חופף למשולש הנתון.

ב. מצאו נקודה E ברביע **השני**, כך שהמשולש ΔABE שיתקבל יהיה חופף למשולש הנתון.

ג. מצאו נקודה F הנמצאת מתחת לציר ה־x, כך שהמשולש ΔBCF שיתקבל יהיה חופף למשולש הנתון.

ד. הנקודה G נמצאת ברביע השלישי. מצאו נקודות M ו־N כלשהן כך שהמשולש ΔGMN שיתקבל יהיה חופף למשולש הנתון.

4. במערכת הצירים מופיע משולש שקודקודיו $A(2,0)$, $B(3,3)$ ו־$C(6,0)$.



א. מצאו שלוש נקודות ברביע **הראשון** שיוצרות משולש חופף למשולש הנתון.

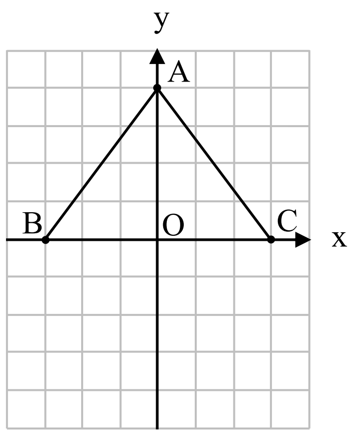
ב. מצאו שלוש נקודות שכל אחת מהן ברביע **אחר**, שיוצרות משולש חופף למשולש הנתון.

תזכורת! צלעות המונחות על ישרים ששיפועיהם שווים, הן מקבילות זו לזו.

5. במערכת הצירים מופיעות הנקודות $A(0,4)$, $B(-3,0)$ ו־$C(3,0)$.

ראשית הצירים בנקודה O.

מורן טענה: "המשולשים ΔACO ו־ΔABO חופפים."

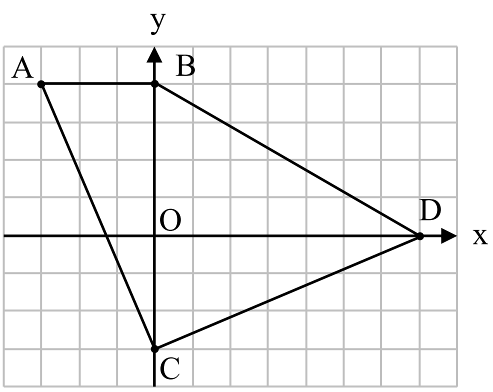


א. האם מורן צודקת? אם כן, הסבירו לפי איזה משפט חפיפה ניתן להראות זאת. אם לא, הסבירו מדוע.

ב. היקף המשולש ΔABC הוא 16 יח'. חשבו את אורך הקטע AC.

ג. הנקודה D נמצאת על החלק השלילי של ציר ה־y כך שמתקיים: $\Delta ACO \cong \Delta DCO$. מצאו את שיעורי הנקודה D.

ד. האם הצלעות הנגדיות במרובע ABDC מקבילות זו לזו? הסבירו.



6. לפניכם הנקודות $A(-3,4)$, $B(0,4)$, $C(0,-3)$ ו־$D(7,0)$.

א. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ABC$.

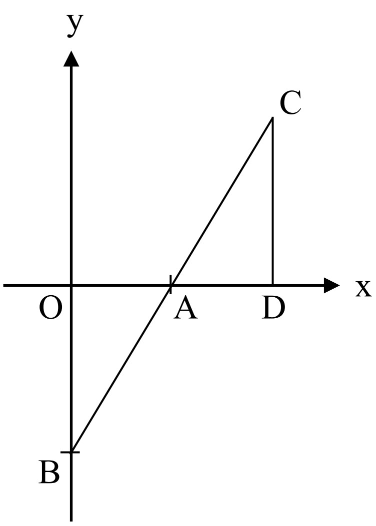
ב. הנקודה O היא ראשית הצירים. עבור כל טענה, קבעו אם היא נכונה או שגויה והסבירו:

i. $\Delta ABC \cong \Delta COD$

ii. $\Delta BDO \cong \Delta CDO$

iii. $\Delta BDO \cong \Delta ACB$

ג. חשבו את שטח המרובע ABDC.



7. הקטע BC חותך את הצירים בנקודות A ו־B כמתואר בשרטוט.

הנקודה D נמצאת על ציר ה־x. נתון: $A(3,0)$, $D(6,0)$.

א. חשבו את אורך הקטע AD.

ב. נתון: $AB = AC$. ראשית הצירים בנקודה O.

לפי איזה משפט חפיפה ניתן להראות ש: $\Delta ABO \cong \Delta ACD$?

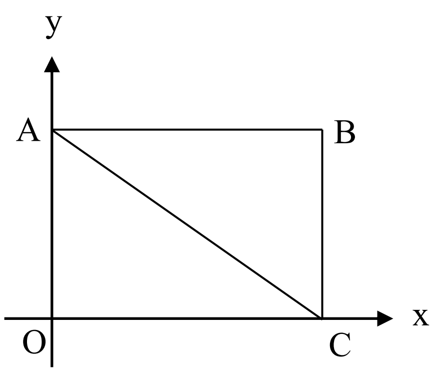
ג. עבור כל טענה, קבעו אם ניתן להסיק אותה מהחפיפה:

i. $\sphericalangle BAO = \sphericalangle ACD$

ii. $\sphericalangle CDA = 90°$

iii. $BO = CD$

ד. נתון: $B(0,-5)$. מצאו את שיעורי הנקודה C.



8. הנקודות A ו־C נמצאות על הצירים כמתואר בשרטוט.

הנקודה B ברביע הראשון. הנקודה O בראשית הצירים.

נתון: $AB \parallel CO$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAO$.

א. לפי איזה משפט חפיפה ניתן להראות ש: $\Delta COA \cong \Delta ABC$? הסבירו.

ב. האם ניתן לקבוע ש: $AB \perp BC$? הסבירו.

ג. מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle BAO$.

ד. האם המרובע ABCO הוא מלבן? הסבירו.

ה. נתון: $B(10,7)$. חשבו את שטח המשולש ΔAOC.

תשובות:

1) א. לפי משפט צ.ז.צ: הצלעות AO ו־BO באורך 4 יח', ולכן שוות באורכן; הזוויות $\sphericalangle AOC$ ו־$\sphericalangle BOC$ הן זוויות ישרות ולכן שוות; הצלע CO משותפת לשני המשולשים.

ב. i. ניתן. **ii.** לא ניתן. **iii.** ניתן. **ג.** ספיר צודקת. הצלע CO משותפת לשני המשולשים, ולכן אורכה לא ישפיע על החפיפה בין המשולשים. כלומר, היא תהיה צלע בשניהם. **ד.** 24 יח"ר.

2) א. חופפים לפי צ.ז.צ. **ב.** חופפים לפי צ.ז.צ. **ג.** אינם חופפים. **ד.** אינם חופפים.
ה. חופפים לפי צ.ז.צ או לפי צ.צ.צ. אם נתייחס לזוויות מתחלפות בין קטעים מקבילים, ניתן להשתמש גם במשפט ז.צ.ז. **ו.** אינם חופפים.

3) א. D (2,4). **ב.** האפשרויות: E (-2,1) או E (-2,4). **ג.** האפשרויות: F (2,-2) או F (0,-2).

ד. אחת האפשרויות: M (0,-3) , N (-2,0).

4) א. אחת האפשרויות: (2,1) , (6,1) , (3,4) . **ב.** אחת האפשרויות: (-1,1) , (-2,-2) , (2,-2) .

5) א. מורן צודקת. המשולשים חופפים לפי משפט צ.ז.צ. **ב.** 5 יח'. **ג.** D(0,-4). **ד.** כן. כיוון שנתונים לנו שיעורי ארבעת הקודקודים, ניתן לחשב את השיפועים של כל הישרים שעליהם מונחות הצלעות. כך נראה שהצלעות הנגדיות מונחות על ישרים בעלי שיפוע שווה, ולכן מקבילות.

6) א. $90°$. **ב. i.** נכונה. המשולשים חופפים לפי משפט צ.ז.צ. **ii.** שגויה. לשני המשולשים צלעות באורכים שונים, ולכן הם אינם חופפים. **iii.** שגויה. לשני המשולשים צלעות באורכים שונים, ולכן הם אינם חופפים. **ג.** 35 יח"ר.

7) א. 3 יח'. **ב.** לפי משפט צ.ז.צ: הצלעות AO ו־AD באורך 3 יח' ולכן שוות באורכן; הזוויות $\sphericalangle CAD$ ו־$\sphericalangle BAO$ הן קודקודיות ולכן שוות; הצלעות AB ו־AC שוות באורכן.

ג. i. לא ניתן. **ii.** ניתן. **iii.** ניתן. **ד.** C(6,5) .

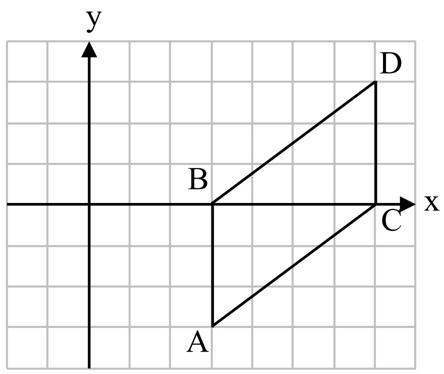
8) א. לפי משפט ז.צ.ז: הזוויות $\sphericalangle BAC$ ו־$\sphericalangle ACO$ הן זוויות מתחלפות בין הקטעים המקבילים AB ו־CO ולכן שוות בגודלן; הצלע AC משותפת לשני המשולשים; הזוויות $\sphericalangle ACB$ ו־$\sphericalangle CAO$ שוות.

ב. ניתן לקבוע. הזווית $\sphericalangle AOC$ מונחת על ראשית הצירים, ולכן היא זווית ישרה. מהחפיפה נובע $\sphericalangle CBA = \sphericalangle AOC$ כיוון שהן זוויות מתאימות במשולשים חופפים. לכן: $\sphericalangle CBA = 90°$

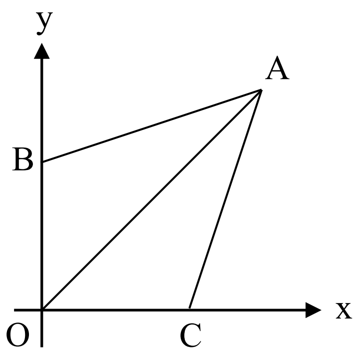
ומתקיים: $AB \perp BC$. **ג.** $90°$. **ד.** כן. הזוויות $\sphericalangle AOC$, $\sphericalangle BAO$ ו־$\sphericalangle CBA$ בגודל $90°$. מרובע שיש בו 3 זוויות ישרות הוא מלבן. **ה.** 35 יח"ר.

משולשים חופפים במערכת הצירים - שלב דדוקטיבי - חישובים והוכחות

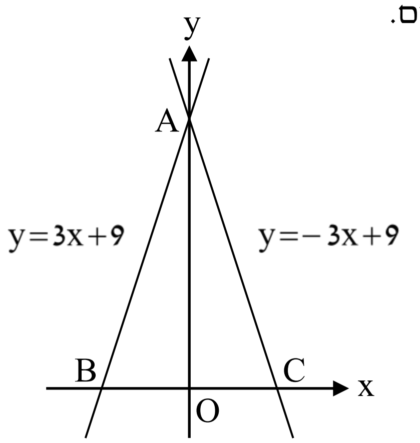
בשאלות הבאות נשתמש בתכונות של משולשים חופפים בצורות המופיעות במערכת הצירים.
יש לזכור שבמערכת הצירים נמדוד את אורכם של קטעים בעזרת יחידות אורך, ולא בעזרת סנטימטרים או יחידות מידה מהמציאות. שטח נמדד על ידי יחידות ריבועיות, או בקיצור יח"ר.



1. נתונות הנקודות: $A(3,-3)$, $B(3,0)$, $C(7\ ,\ 0)$, $D(7,3)$.
   א. חשבו את אורך הקטע:
      1. AB
      2. BC
      3. CD
   ב. היעזרו בנתונים שבשרטוט והוכיחו: $\Delta ABC \cong \Delta DCB$.



2. נתונות הנקודות: $A(6,6)$, $B(0,4)$ ו־$C(4,0)$.
   ראשית הצירים בנקודה O.
   הקטע AO חוצה את הזווית $\sphericalangle BOC$.
   א. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle AOC$.
   ב. הוכיחו: $\Delta ABO \cong \Delta ACO$.



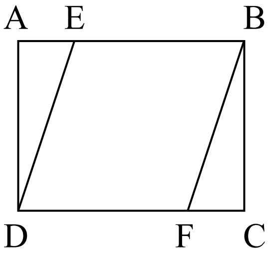
3. בשרטוט שלפניכם מופיעות נקודות החיתוך של שני ישרים עם הצירים.
   א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B ו־C.
   ב. ראשית הצירים בנקודה O.
      חשבו את אורכי הקטעים AO, BO ו־CO.
   ג. הוכיחו: $\Delta ABO \cong \Delta ACO$.
   ד. חשבו את שטח המשולש ΔABC.

4. לפניכם המלבן ABCD.

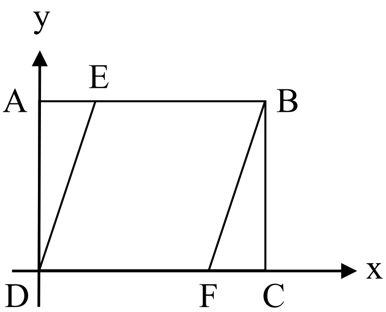
הנקודות E ו־F נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו־CD.

נתון: $CD = 8$ ס"מ, $AD = 6$ ס"מ, $AE = 2$ ס"מ, $DF = 6$ ס"מ.

תלמידי הכיתה נדרשו להוכיח שמתקיים: $DE \parallel BF$.



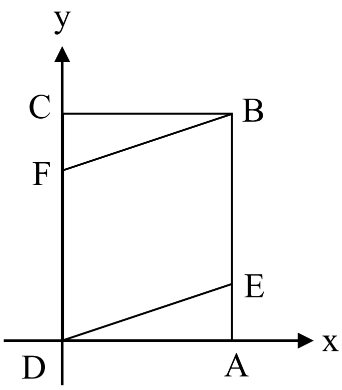
איתי הציע להניח את המלבן על מערכת הצירים באופן המתואר בשרטוט, כך שכל יחידה בשרטוט מייצגת 1 ס"מ במציאות.



א. כתבו את שיעורי הנקודות A, B, C, D, E ו־F.

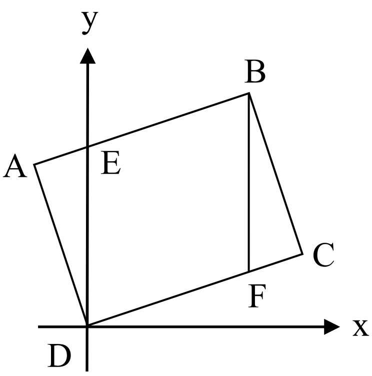
ב. היעזרו במערכת הצירים, והראו שמתקיים: $DE \parallel BF$.

ג. יובל הניחה את המלבן על מערכת הצירים באופן המתואר בשרטוט משמאל.



1. האם ניתן לקבוע מהם שיעורי הנקודות A, B, C, D, E ו־F? אם כן, מצאו אותם.
2. האם הנחת המלבן באופן זה תוכל לסייע ליובל להוכיח שמתקיים: $DE \parallel BF$? הסבירו.

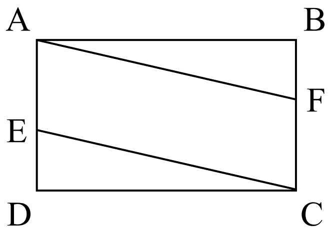
ד. שגיא הניח את המלבן במערכת הצירים באופן המתואר בשרטוט משמאל.



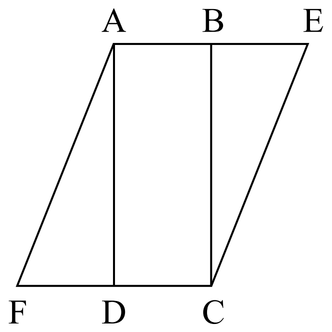
1. האם ניתן לקבוע מהם שיעורי הנקודות A, B, C, D, E ו־F? אם כן, מצאו אותם.
2. האם הנחת המלבן באופן זה תוכל לסייע לשגיא להוכיח שמתקיים: $DE \parallel BF$? הסבירו.

בשאלה הקודמת מצאנו שכאשר נתונה לנו שאלה בגיאומטריה, נוכל לנסות ולהניח את הצורה על מערכת הצירים ולהיעזר בשיפועי הישרים כדי להוכיח תכונות גיאומטריות.

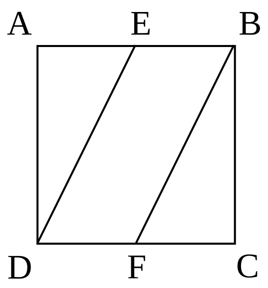
5. (*) במלבן ABCD הנקודות E ו־F נמצאות בהתאמה על הצלעות AD ו־BC. נתון: 8 ס"מ $=AB$, 2 ס"מ $=ED$, 3 ס"מ $=CF$. שטח המלבן 40 סמ"ר.
היעזרו במערכת הצירים והוכיחו: $AF \parallel CE$.



6. (*) למלבן ABCD יש צלעות משותפות עם המשולשים **החופפים** ΔBCE ו־ΔDAF, כמתואר בשרטוט.
נתון: 5 ס"מ $=AE$, 2 ס"מ $=CD$.
היקף המלבן ABCD הוא 12 ס"מ.
הראו שמתקיים: $AF \parallel CE$ בשתי דרכים:
א. בעזרת הוכחה גיאומטרית.
ב. תוך שימוש במערכת צירים.



7. (*) נתון הריבוע ABCD שהיקפו 24 ס"מ.
הנקודות E ו־F הן בהתאמה אמצעי הצלעות AB ו־CD.
מצאו שתי דרכים שבהן תוכלו להראות שהקטעים DE ו־BF מקבילים זה לזה.



תשובות:

1) א. 1. 3 יח'. **2.** 4 יח'. **3.** 3 יח'.

2) א. 45°. **3) א.** $A(0,9)$, $B(-3,0)$, $C(3,0)$. **ב.** 9 יח' $=AO$, 3 יח' $=BO$, 3 יח' $=CO$. **ד.** 27 יח"ר.

4) א. $A\ (0,6)$, $B\ (8,6)$, $C\ (8,0)$, $D\ (0,0)$, $E\ (2,6)$, $F\ (6,0)$. **ב.** שיפועי הישרים שעליהם מונחים הקטעים DE ו־BF הם 3 ולכן הם מקבילים. **ג. 1.** ניתן לקבוע ששיעורי הנקודות הם: $A\ (6,0)$, $B\ (6,8)$, $C\ (0,8)$, $D\ (0,0)$, $E\ (6,2)$, $F\ (0,6)$. **2.** ניתן לחשב שיפועים בדומה לסעיף ב' ולהראות שהקטעים מקבילים. **ד. 1.** ניתן למצוא רק את שיעור הקודקוד D, הנמצא בראשית הצירים.
2. לא ניתן לחשב שיפועים, ולכן לא ניתן להוכיח שהקטעים מקבילים.

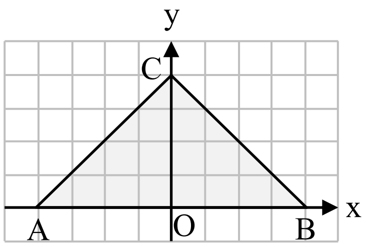
5) דרך א': ניתן לחפוף את שני המשולשים ישרי הזווית ובעזרת סימון זוויות להראות שמתקיים השוויון: $\measuredangle FBE = \measuredangle DEA$ וממנו להסיק שמדובר על זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים.
דרך ב': ניתן להניח את הריבוע על מערכת הצירים כך שכל יחידה במערכת הצירים מייצגת סנטימטר והקודקוד D בראשית הצירים (0,0). כעת ניתן למצוא את שיעורי הקודקודים B, F ו־E ולהראות ששני הקטעים DE ו־BF מונחים על ישרים ששיפועיהם שווים.

משולש שווה שוקיים במערכת הצירים

בשאלות הבאות נשתמש בתכונות של משולש שווה שוקיים בצורות המופיעות במערכת הצירים.

1. הנקודות A, B ו־C מונחות על הצירים כמתואר בשרטוט.

ראשית הצירים בנקודה O.



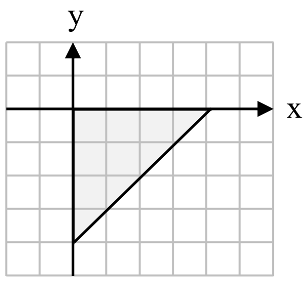
א. הראו ש: $\Delta ACO \cong \Delta BCO$.

ב. מה ניתן לומר על המשולש ΔABC?

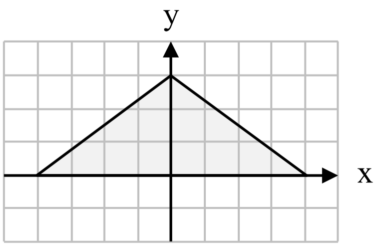
ג. חשבו את שטח המשולש ΔABC.

2. בכל סעיף היעזרו במשבצות, וקבעו אם המשולש האפור הוא שווה שוקיים:

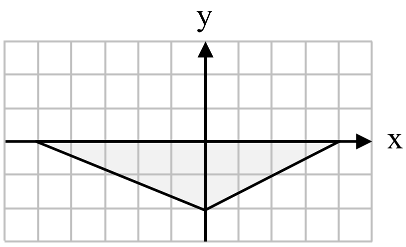
א.



ב.

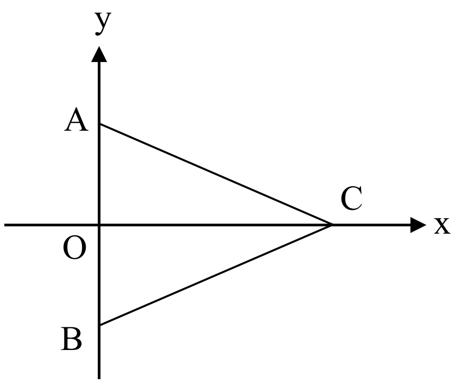


ג.



3. הנקודות A, B ו־C נמצאות על הצירים כמתואר בשרטוט.

המשולש ΔABC הוא שווה שוקיים כך ש: $AC = BC$.



א. האם מתקיים: $AO = BO$? הסבירו.

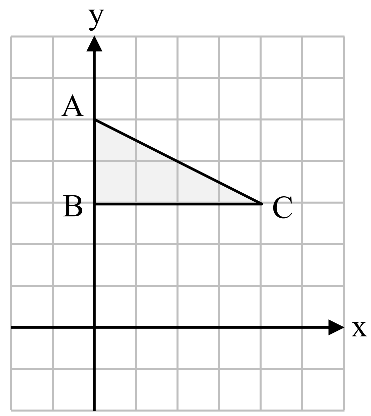
ב. נתון: $AB = 4$. מצאו את שיעורי הנקודות A ו־B.

ג. נתון: $\measuredangle ACO = 22°$. חשבו את גודל הזוויות:

1. $\measuredangle BCO$
2. $\measuredangle CAB$

ד. נתון ששטח המשולש ΔABC הוא 10 יח״ר. מצאו את שיעורי הקודקוד C.

4. לפניכם הנקודות A, B ו־C.



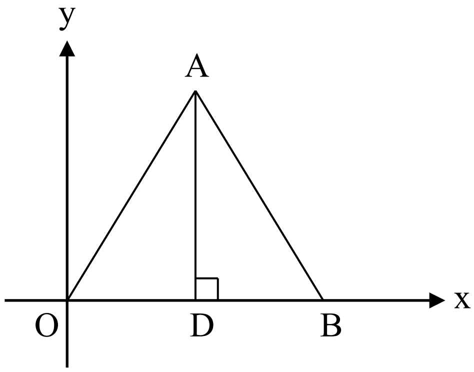
א. הראו ש: $\sphericalangle ABC = 90°$.

ב. מצאו נקודה D ברביע השני שעבורה יתקבל המשולש שווה השוקיים ΔACD שבו הנקודה A היא קודקוד הראש.

ג. מצאו נקודה E על ציר ה־y, שעבורה יתקבל המשולש שווה השוקיים ΔACE שבו הנקודה C היא קודקוד הראש.

ד. מצאו נקודה G על החלק החיובי של ציר ה־y שעבורה יתקבל המשולש שווה השוקיים ΔBCG.

5. לפניכם המשולש שווה השוקיים ΔABO.



נתון: $AO = AB$. הנקודה B נמצאת על ציר ה־x.

ראשית הצירים בנקודה O. הקטע AD הוא הגובה לבסיס BO.

א. הסבירו מדוע לנקודות A ו־D יש אותו שיעור x.

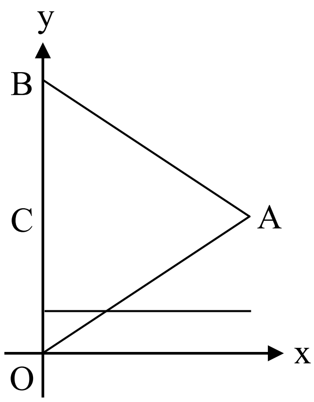
ב. נתון: $\sphericalangle BAD = 30°$. מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle DAO$.

ג. האם המשולש ΔABO הוא שווה צלעות? הסבירו.

ד. נתון שהיקף המשולש ΔABO הוא 24 יח' אורך.

1. חשבו את אורך הבסיס BO.
2. מצאו את שיעורי הנקודה D.

6. ראשית הצירים בנקודה O.



נתון: $A(6,4)$, $B(0,8)$, $C(0,4)$.

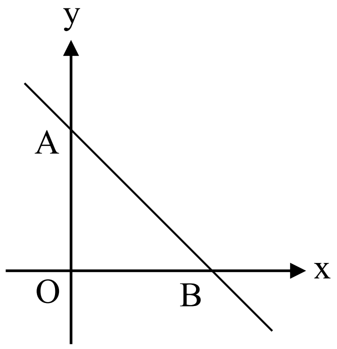
א. הראו שהקטע AC הוא גובה במשולש ΔABO.

ב. הראו שהנקודה C היא אמצע הקטע BO.

ג. הראו כיצד ניתן להסיק ש: $AB = AO$.

ד. נתון: $\sphericalangle BAO = 67°$. חשבו את גודל הזוויות:

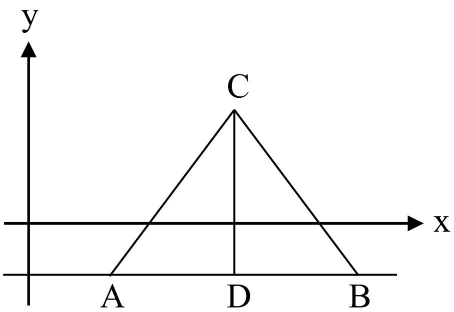
1. $\sphericalangle BAC$
2. $\sphericalangle ABO$



7. הישר $y=-x+2$ חותך את הצירים בנקודות A ו־B.
ראשית הצירים בנקודה O.
א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו־B.
ב. האם המשולש ΔABO ישר זווית? הסבירו.
ג. האם המשולש ΔABO שווה שוקיים? הסבירו.
ד. מצאו שיעורי נקודה C על החלק השלילי של ציר ה־x כך שיתקבל המשולש ΔABC שווה השוקיים שהנקודה A היא קודקוד הראש שלו.
ה. מצאו שיעורי נקודה D על החלק השלילי של ציר ה־y כך שיתקבל המשולש ΔABD שווה השוקיים שהנקודה B היא קודקוד הראש שלו.

8. נתונות הנקודות A (2,0), B (4,5) ו־C (6,0).
א. מקמו אותן במערכת הצירים במחברת.
ב. האם המשולש ΔABC הוא שווה שוקיים?
אם כן, קבעו מהו קודקוד הראש.

9. נתונות הנקודות A (-6,3), B (-3,0) ו־C (0,3).
א. הציעו שתי דרכים להראות שהמשולש ΔABC הוא שווה שוקיים.
ב. מהו אורך הגובה היורד מהקודקוד B?
ג. חשבו את שטח המשולש.



10. נתונות הנקודות A(3,-2) ו־B(9,-2).
א. מצאו את משוואת הישר שעליו מונחות הנקודות A ו־B.
ב. נתון: C(6,4), D(6,-2).
1. הראו שהקטע CD הוא תיכון במשולש ΔABC.
2. מצאו את משוואת הישר העובר בנקודות C ו־D.
ג. האם הקטע CD הוא גובה במשולש ΔABC? הסבירו.
ד. היעזרו בסעיפים ב' ו־ג' וקבעו אם המשולש ΔABC שווה שוקיים. הסבירו.

תשובות:

1) ב. המשולש שווה שוקיים. **ג.** 16 יח"ר. **2) א.** שווה שוקיים. **ב.** שווה שוקיים. **ג.** לא שווה שוקיים.

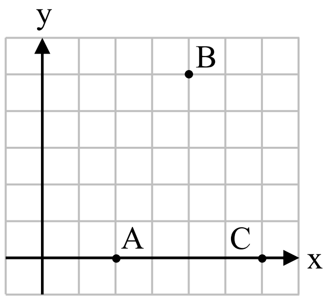
3) א. כן, במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס מתלכד עם התיכון ולכן הגובה CO לבסיס המשולש שווה השוקיים ΔABC חוצה את הצלע AB כך שמתקיים: $AO = BO$. **ב.** $A(0,2)$, $B(0,-2)$.
ג. 1. $22°$. **2.** $68°$. **ד.** $C(5,0)$. **4) ב.** $D(-4,3)$. **ג.** $E(0,1)$. **ד.** $G(0,7)$.

5) א. הקטע BO מתלכד עם ציר ה־x ולכן הקטע AD המאונך לו, מאונך גם לציר ה־x. לכן כל הנקודות על הקטע AD הן בעלות אותו שיעור x ובפרט הנקודות A ו־D. **ב.** $30°$. **ג.** כן. שלוש זוויות המשולש הן בגודל של $60°$ ולכן הוא שווה צלעות. **ד. 1.** 8 יח'. **2.** $D(4,0)$.

6) א. שיעורי ה־y של הנקודות A ו־C שווים ולכן הקטע AC מאונך לציר ה־y ובפרט לקטע BO המונח עליו. מצאנו שהקטע AC מאונך לבסיס במשולש ΔABO ולכן הוא גובה במשולש. **ב.** הקטעים BC ו־CO נמצאים על ציר ה־y ולכן האורכים שלהם שווים להפרשים בין שיעורי ה־y של הנקודות שבקצוות של כל קטע. שני האורכים המתקבלים שווים ל־4 יח' ולכן הם שווים באורכם. מכאן נובע שהנקודה C היא אמצע הקטע BO. **ג.** הקטע AC הוא תיכון וגם גובה במשולש ΔABO ולכן המשולש שווה שוקיים. מכאן נובע שמתקיים: $AB = AO$. **ד. 1.** $33.5°$. **2.** $56.5°$.

7) א. $A(0,2)$, $B(2,0)$. **ב.** כן, במערכת הצירים ציר ה־x מאונך לציר ה־y ולכן הזווית $\sphericalangle AOB$ שנוצרת בנקודת החיתוך שלהם היא זווית ישרה. **ג.** כן. כמסקנה מסעיף א', אורכי שני הקטעים AO ו־BO הם 2 יח'. הם שווים באורכם ומכאן שהמשולש ΔABO שווה שוקיים. **ד.** $C(-2,0)$. **ה.** $D(0,-2)$.

8) א. השרטוט משמאל. **ב.** המשולש שווה שוקיים; קודקוד B.



9) א. אפשרות א': ניתן להראות שהגובה מהקודקוד B הוא גם התיכון לבסיס AC;
אפשרות ב': ניתן להוסיף במערכת הצירים את הנקודה $D(-3,3)$ ולהראות שהמשולשים ΔABD ו־ΔCBD חופפים ולכן הצלעות AB ו־BC שוות. **ב.** 3 יח'. **ג.** 9 יח"ר.

10) א. $y = -2$. **ב. 1.** הקטעים AD ו־BD נמצאים על ישר המקביל לציר ה־x ולכן אורכיהם שווים להפרשים בין שיעורי ה־x של הנקודות שבקצוות כל קטע. שני האורכים המתקבלים הם 3 יח' ולכן שווים באורכם. מכאן נובע שהנקודה D היא אמצע הקטע AB ולכן CD הוא תיכון במשולש ΔABC. **2.** $x = 6$. **ג.** כן. הקטע CD נמצא על הישר $x = 6$ המאונך לציר ה־x ולכן מאונך גם לישר העובר בנקודות A ו־B ומקביל לציר ה־x. מצאנו שהקטע CD מאונך לבסיס במשולש ΔABC ולכן הוא גובה במשולש. **ד.** במשולש ΔABC הקטע CD הוא תיכון וגם גובה, ולכן המשולש שווה שוקיים.

משולש שווה שוקיים במערכת הצירים - חישובים והוכחות

בשאלות הבאות נשתמש בתכונות של משולש שווה שוקיים בצורות המופיעות במערכת הצירים.
בחלק מהסעיפים נעסוק בהוכחה גיאומטרית.

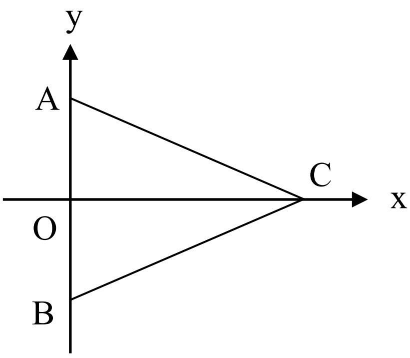
1. הנקודות A, B ו־C נמצאות על הצירים כמתואר בשרטוט.

   נתון: A(0,5), B(0,-5).

   א. חשבו את אורכי הקטעים AO ו־BO.

   ב. הוכיחו: $\Delta AOC \cong \Delta BOC$.

   ג. נתון: $AB = CO$.
   חשבו את שטח המשולש ΔABC.



2. במשולש ΔABC נתון: A (2,4), B (6,8), C (6,0).

   א. הראו שהצלע BC מאונכת לציר ה־x.

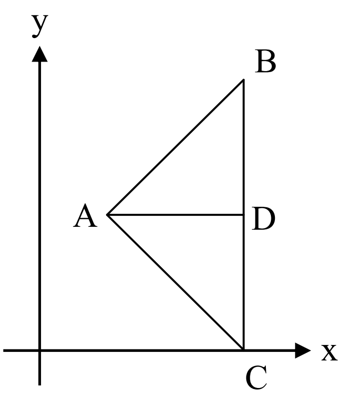
   ב. נתון: D (6,4). הראו ש: $BD = CD = AD$.

   ג. האם מתקיים: $AD \perp BC$? הסבירו.

   ד. הוכיחו: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

   ה. היעזרו בסעיף ב׳ וחשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ABD$.

   ו. הוכיחו: $AB \perp AC$.



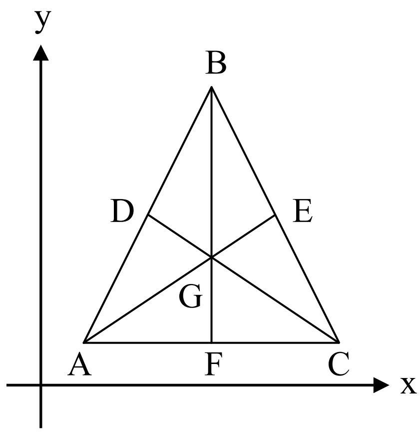
3. במשולש ΔABC נתון: A (2,2), B (8,14), C (14,2).

   א. האם הצלע AC מקבילה לציר ה־x?

   ב. נתון: F (8,2). האם הקטע BF הוא גובה במשולש ΔABC?

   ג. הוכיחו: $AB = BC$.

   ד. נתון שהנקודות D ו־E הן אמצעי הצלעות AB ו־BC
   בהתאמה. הוכיחו: $\Delta ADC \cong \Delta CEA$.



4. הישר $y=x+3$ חותך את הצירים בנקודות A ו־B.

א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו־B.

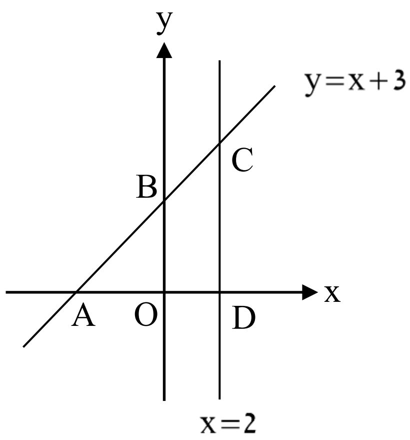
ב. ראשית הצירים בנקודה O.

1. הוכיחו: המשולש ΔABO שווה שוקיים.

2. חשבו את שטח המשולש ΔABO.

ג. הישר $x=2$ חותך את הישר $y=x+3$ בנקודה C ואת ציר ה־x בנקודה D. מצאו את שיעורי הנקודות D ו־C.

ד. הוכיחו: המשולש ΔACD הוא ישר זווית ושווה שוקיים.



תשובות:

1) א. $AO=5$, $BO=5$. **ג.** 50 יח"ר.

2) ג. כן. שיעורי ה־y של הנקודות A ו־D זהים ולכן הצלע AD מקבילה לציר ה־x. הראנו בסעיף א' שהצלע BC מאונכת לציר ה־x. לכן הישרים AD ו־BC מאונכים זה לזה. **ה.** $45°$.

3) א. כן. שיעורי ה־y של הנקודות A ו־C זהים, ולכן הצלע AC מקבילה לציר ה־x.

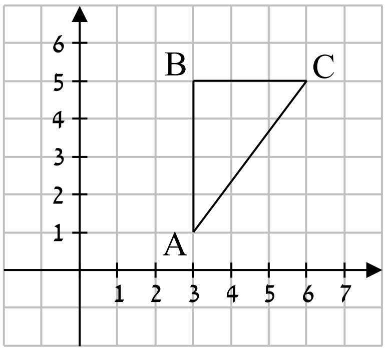
ב. כן. שיעורי ה־x של הנקודות B ו־F זהים, ולכן הקטע BF מאונך לקטע AC, והוא גובה.

4) א. $A(-3,0)$, $B(0,3)$. **ב. 1.** כמסקנה מסעיף א' אורכי שני הקטעים AO ו־BO הם 3 יח' ולכן הם שווים זה לזה באורכם והמשולש ΔABO שווה שוקיים. **2.** 4.5 יח"ר. **ג.** $C(2,5)$, $D(2,0)$.

ד. הישר $x=2$ מאונך לציר ה־x ולכן $\sphericalangle ADC=90°$ והמשולש ΔACD ישר זווית; הצלע AD נמצאת על ציר ה־x ולכן אורכה שווה להפרש בין שיעורי ה־x של הנקודות D ו־A. הצלע CD נמצאת על ישר המקביל לציר ה־y ולכן אורכה שווה להפרש בין שיעורי ה־y של הנקודות C ו־D. שני האורכים המתקבלים שווים ל־5 יח' ולכן הצלעות שוות באורכן והמשולש ΔACD שווה שוקיים.

שאלות הכוללות שימוש במשפט פיתגורס לחישוב מרחק בין נקודות

בשאלות הבאות נחשב מרחק בין נקודות ללא שימוש בנוסחה למרחק בין נקודות.



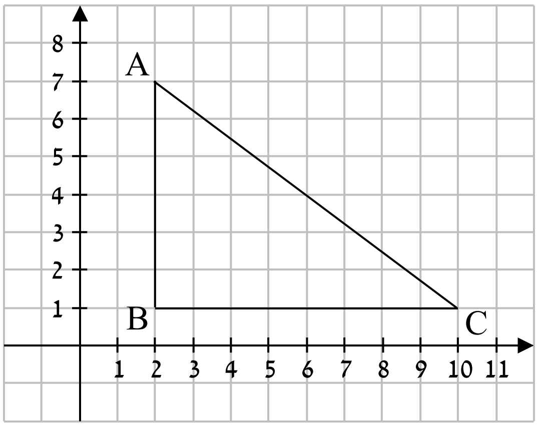
1. לפניכם המשולש ישר הזווית ΔABC.

א. קבעו איזו מזוויות המשולש היא ישרה. הסבירו.

ב. חשבו את אורכי הצלעות AB ו-BC.

ג. נופר טענה שבעזרת משפט פיתגורס ניתן לחשב את אורך היתר AC. האם נופר צודקת? אם כן, הסבירו מדוע וחשבו את אורך היתר AC. אחרת, הסבירו מדוע היא טועה.

ד. חשבו את היקף המשולש ΔABC.



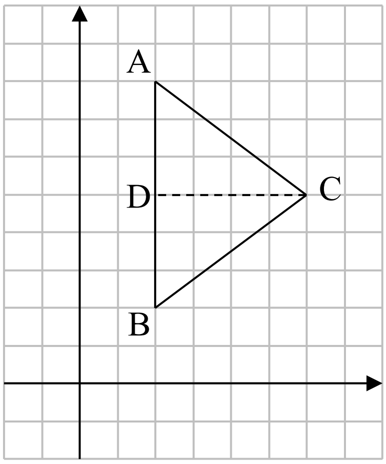
2. לפניכם המשולש ישר הזווית ΔABC.

א. חשבו את אורכי הניצבים AB ו-BC.

ב. חשבו את אורכו של היתר AC.

ג. חשבו את היקף המשולש.

ד. חשבו את שטח המשולש.



3. לפניכם המשולש ΔABC.

הנקודה D היא אמצע הצלע AB.

א. חשבו את אורכי הצלעות במשולש.

ב. בחרו את התשובה הנכונה.

המשולש ΔABC הוא משולש:

i. שווה צלעות. ii. שונה צלעות. iii. שווה שוקיים.

ג. חשבו את שטח המשולש ΔABC.

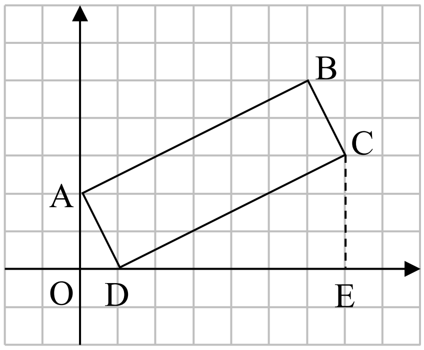
ד. חשבו את היקף המשולש ΔABC.

4. בכל סעיף מופיעים קודקודים של משולש ישר זווית.

מקמו את הקודקודים במערכת הצירים, זהו איזו צלע היא היתר וחשבו את אורכה.

א. $A(1,3)$, $B(4,3)$, $C(1,7)$ ב. $A(-3,2)$, $B(5,2)$, $C(5,8)$ ג. $A(9,4)$, $B(-3,4)$, $C(9,-1)$

5. לפניכם המלבן ABCD.



א. חשבו את אורך AD. השאירו בתשובה את סימן השורש.

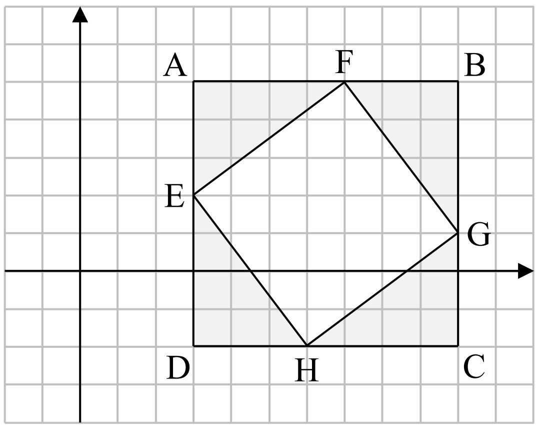
ב. הנקודה E נמצאת על ציר ה-x.
איזה סוג משולש הוא ΔDCE ? הסבירו.

ג. ראשית הצירים בנקודה O. הראו ש: $\Delta ADO \sim \Delta DCE$.

ד. חשבו את אורך CD. השאירו בתשובה את סימן השורש.

ה. חשבו את שטח המלבן.

6. לפניכם המלבן ABCD במערכת הצירים.



א. מצאו את שיעורי הנקודות E, F, G ו-H.

ב. חשבו את אורך הקטע EF.

ג. אופק טען שארבעת המשולשים האפורים חופפים.
האם לדעתכם הוא צודק? אם כן, הסבירו על איזה משפט חפיפה אופק הסתמך. אם לא, הסבירו מדוע.

ד. היעזרו בסעיף ג׳ וחשבו את אורכי הצלעות במרובע EFGH.

ה. סיוון טענה שהמרובע EFGH הוא מעוין.
האם לדעתכם היא צודקת? הסבירו.

ו. כיצד ניתן לבדוק האם המרובע EFGH הוא ריבוע? בדקו וקבעו אם הוא ריבוע.

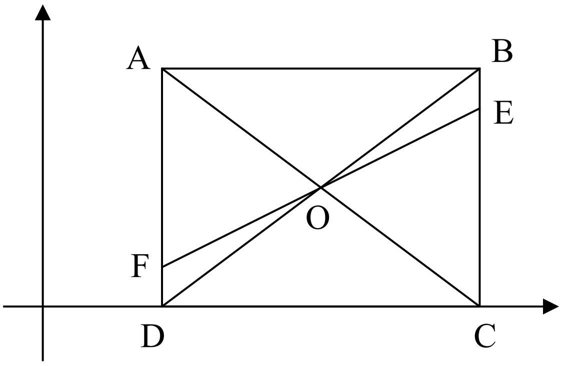
ז. חשבו את ההיקף ואת השטח של המרובע EFGH.

תשובות:

1) א. הזווית $\measuredangle B$ ישרה משום הצלעות AB ו-BC מקבילות לצירים ולכן מאונכות זו לזו.
ב. $AB =$ 4 יח׳ , $BC =$ 3 יח׳ . **ג.** נופר צודקת מכיוון שהמשולש הוא ישר זווית. $AC =$ 5 יח׳ . **ד.** 12 יח׳.

2) א. $AB =$ 6 יח׳ , $BC =$ 8 יח׳ . **ב.** 10 יח׳. **ג.** 24 יח׳. **ד.** 24 יח״ר. **3) א.** $AB =$ 6 יח׳ , $BC =$ 5 יח׳ , $AC =$ 5 יח׳ . **ב.** iii. **ג.** 12 יח״ר. **ד.** 16 יח׳. **4) א.** היתר CB ואורכו 5 יח׳. **ב.** היתר AC ואורכו 10 יח׳. **ג.** היתר BC ואורכו 13 יח׳. **5) א.** $\sqrt{5}$ יח׳. **ב.** זהו משולש ישר זווית, משום שהצלע CE היא אנך לציר ה-x שעליו נמצאת הצלע DE. **ד.** $\sqrt{45}$ יח׳. **ה.** 15 יח״ר. **6) א.** $E(3,2)\,,\,F(7,5)\,,\,G(10,1)\,,\,H(6,-2)$.
ב. כולן 5 יח׳. **ג.** אופק צודק. הוא הסתמך על משפט החפיפה צ.ז.צ. **ד.** 5 יח׳. **ה.** סיוון צודקת. המרובע הוא מעוין מכיוון שיש לו ארבע צלעות שוות. **ו.** לארבעת המשולשים אותן זוויות: אחת ישרה, אחת שנסמן בתור α ואחת שנסמן בתור $90^\circ-\alpha$. אם נסמן כך שניים מהמשולשים הסמוכים זה לזה, נמצא שאחת מזוויות המרובע EFGH ישרה. מעוין שיש בו זווית ישרה הוא ריבוע. **ז.** ההיקף 20 יח׳, השטח 25 יח״ר.

שאלות שונות המשלבות גיאומטריה אוקלידית וגיאומטריה אנליטית



1. במלבן ABCD הצלע CD נמצאת על ציר ה-x.

הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הצלעות BC ו-AD.

הקטע EF עובר דרך מפגש האלכסונים O.

א. הוכיחו: $\Delta BEO \cong \Delta DFO$.

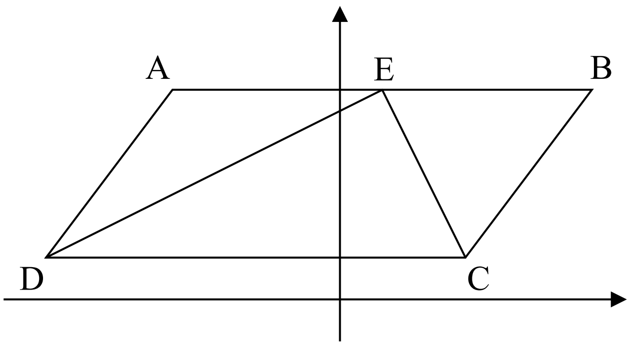
ב. נתון: $E(11,5)$, $CE = 5BE$.

מצאו את שיעורי הקודקודים C ו-B.

ג. נתון: 5 יח' = CO. הוכיחו: $\sphericalangle CEO = \sphericalangle COE$.

ד. נתון: שטח המשולש ΔBEO הוא 2 יח"ר. מצאו את שיעור ה-x של הנקודה O.

2. הנקודה E נמצאת על הצלע AB במקבילית ABCD.



הצלע AB מקבילה לציר ה-x.

נתון: $C(3,1)$, $E(1,5)$, CD = 10.

א. מצאו את שיעורי הקודקוד D.

ב. נתון: $DE \perp CE$.

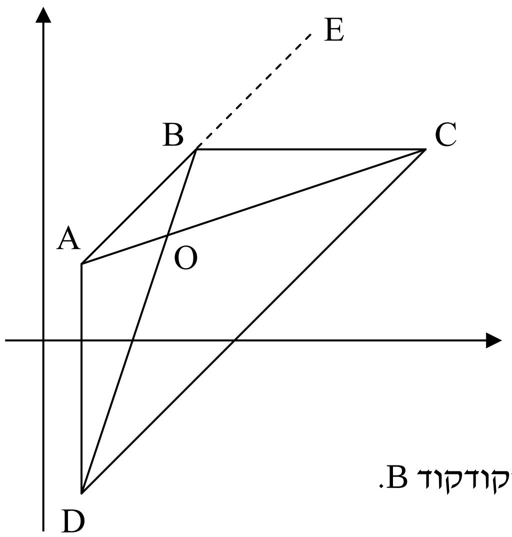
הקטע DE חוצה את הזווית $\sphericalangle ADC$.

הוכיחו: $AD = AE$.

ג. נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$. הביעו באמצעות α את גודל הזוויות:

1. $\sphericalangle AED$ 2. $\sphericalangle BEC$ 3. $\sphericalangle EBC$

ד. הוכיחו: $BE = BC$.



3. אלכסוני המרובע ABCD נחתכים בנקודה O.

הנקודה E נמצאת על המשך הצלע AB.

נתון: $A(1,2)$, $E(7,8)$, $C(10,5)$, $D(1,-4)$.

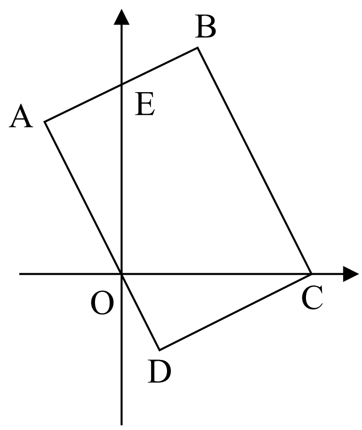
א. הראו שמתקיים: $AE \parallel CD$.

ב. הוכיחו: $\Delta ABO \sim \Delta CDO$.

ג. נתון: $AO = BO$. הוכיחו:

1. $CO = DO$ 2. $AD = BC$

ד. נתון שהצלע BC מקבילה לציר ה-x. מצאו את שיעורי הקודקוד B.



4. במלבן ABCD הצלע AD עוברת דרך ראשית הצירים O.

הצלע AB מונחת על הישר $y = 0.5x + 5$, וחותכת את ציר ה־y בנקודה E.

הקודקוד C נמצא על ציר ה־x.

א. מצאו את שיעורי הנקודה E.

ב. הוכיחו : $\sphericalangle AEO = \sphericalangle DOC$.

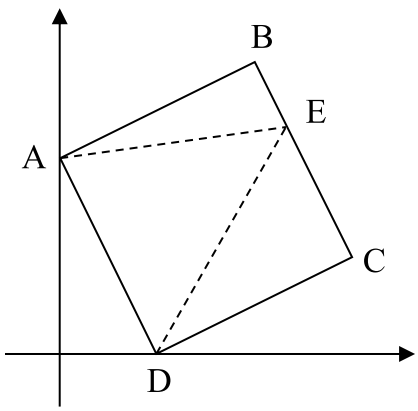
ג. נתון : $C(5,0)$. הוכיחו : $\Delta AEO \cong \Delta DOC$.

ד. נתון ששיפוע הישר שעליו מונחת הצלע AD הוא 2-. מצאו את :

1. משוואת הישר שעליו מונחת הצלע AD.
2. שיעורי הקודקוד A.
3. שטח המשולש ΔAEO .

ה. שטח המרובע BCOE הוא 20 יח"ר. חשבו את שטח המלבן ABCD.

ו. הנקודה M נמצאת על הצלע BC. חשבו את שטח המשולש ΔAMD .



5. בריבוע ABCD הקודקודים A ו-D נמצאים על הצירים כמתואר

בשרטוט. הצלע AD מונחת על הישר $y = -2x + 6$.

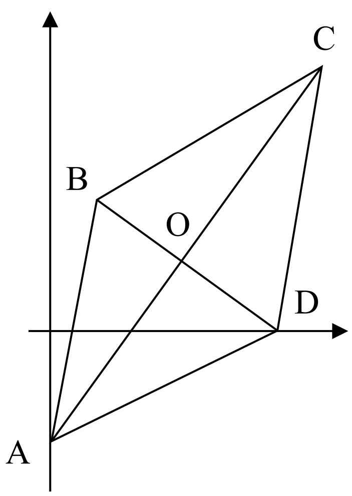
א. מצאו את שיעורי הקודקודים A ו-D.

ב. היעזרו במשפט פיתגורס וחשבו את אורך הצלע AD.

ג. חשבו את שטח הריבוע.

ד. הנקודה E נמצאת על הצלע BC.

חשבו את שטח המשולש ΔADE .



6. אלכסוני המעוין ABCD נחתכים בנקודה O.

א. קבעו האם ארבעת המשולשים המרכיבים את המעוין
חופפים זה לזה. הסבירו את תשובתכם.

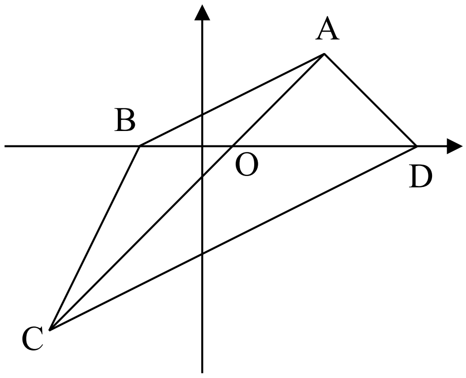
ב. נתון ששטח המעוין הוא 100 יח"ר. חשבו את שטח המשולש ΔADO .

ג. נתון : $AO = 2DO$. חשבו את :

1. אורך הקטע AO.   2. היקף המעוין.

ד. נתון : A (0 , -5). שיפוע הישר שעליו מונחת הצלע BC הוא 0.5.

1. מצאו את שיעורי הנקודה D.
2. נתון : O (6 , 3). שיפוע הישר שעליו מונחת הצלע CD הוא 5.5.
מצאו את שיעורי הנקודה B.



7. אלכסוני הטרפז ABCD נחתכים בנקודה O על ציר ה-x.
נתון: $AB \| CD$.
הקודקודים B ו-D נמצאים על ציר ה-x כמתואר בשרטוט.
א. הוכיחו את שוויון השטחים: $S_{\Delta BCD} = S_{\Delta ACD}$.
ב. גאיה טענה שמתקיים: $S_{\Delta BCO} = S_{\Delta ADO}$.
מבלי לבצע חישוב כלשהו, קבעו אם גאיה צודקת. הסבירו.
ג. נתון: $A(4,3)$, $C(-5,-6)$.
אורך האלכסון BD הוא 9 יח'. חשבו את שטח הטרפז ABCD.

תשובות:

1) ב. $B(11,6)$, $C(11,0)$. **ד.** $x_O = 7$.

2) א. $D(-7,1)$. **ג. 1.** α. **2.** $90^\circ - \alpha$. **3.** 2α.

3) ד. $B(4,5)$.

4) א. $E(0,5)$. **ד. 1.** $y = -2x$. **2.** $A(-2,4)$. **3.** 5 יח"ר. **ה.** 30 יח"ר. **ו.** 15 יח"ר.

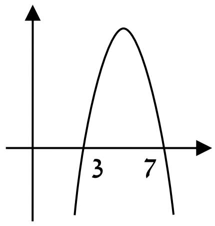
5) א. $A(0,6)$, $D(3,0)$. **ב.** $\sqrt{45}$ יח'. **ג.** 45 יח"ר. **ד.** 22.5 יח"ר.

6) א. ארבעת המשולשים חופפים זה לזה. החפיפה נובעת מכך שצלעות המעוין שוות זו לזו ואלכסוניו מאונכים זה לזה וחוצים זה את זה. **ב.** 25 יח"ר. **ג. 1.** 10 יח'. **2.** $20\sqrt{5}$ יח'. **ד) 1.** $D(10,0)$. **2.** $B(2,6)$.

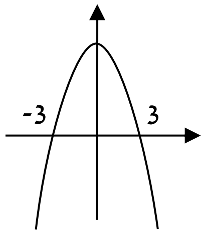
7) ב. גאיה צודקת. בסעיף א' הוכחנו שמתקיים שוויון השטחים: $S_{\Delta BCD} = S_{\Delta ACD}$. אם נחסר משני השטחים השווים האלו את שטח המשולש ΔCDO, יתקבלו שני המשולשים המופיעים בסעיף ב', והם יהיו שווים. **ג.** 40.5 יח"ר.

נספח 2: פתרון אי שוויונות ריבועיים בעזרת פרבולה

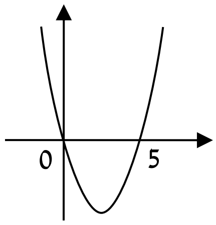
1. בכל סעיף מופיעה פרבולה של הפונקציה הריבועית $f(x)$.
היעזרו בנתונים שבשרטוט ופתרו את אי השוויון המופיע מתחת לפרבולה:

א.


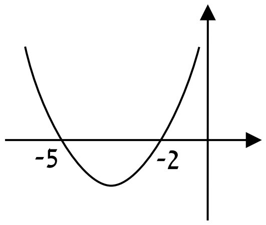
$0<f(x)$

ב.


$f(x)<0$

ג.


$f(x)\le 0$

ד.


$0\le f(x)$

2. נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x)=x^2-6x+8$.

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

ב. הציבו בפונקציה את הערכים $x=5$, $x=3$ ו-$x=1$ ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

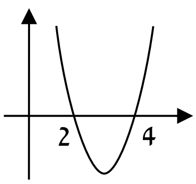
ד. היעזרו בסקיצה ופתרו את אי השוויונות הבאים: i. $x^2-6x+8<0$ ii. $0\le x^2-6x+8$

3. היעזרו בשאלה הקודמת, שרטטו סקיצות של פרבולה מתאימה ופתרו באופן גרפי את אי השוויונות:

א. $x^2-3x+2<0$	ב. $x^2-5x+6<0$	ג. $-x^2-3x+10<0$	ד. $-x^2+7x\le 0$
ה. $x^2+5x+4>0$	ו. $2x^2-5x+2>0$	ז. $-x^2+4x+12\ge 0$	ח. $x^2-9>0$
ט. $x^2-2x+1<0$	י. $3x^2-5x+3<0$	יא. $-x^2+1\le 0$	יב. $4x^2+4x+1<0$
יג. $x^2+6x+9\ge 0$	יד. $-2x^2+5x>0$	טו. $-x^2+25>0$	טז. $5x^2-26x+5\ge 0$
יז. $-x^2+5x-7<0$	יח. $x^2-10x+9<0$	יט. $-x^2-8x-16<0$	כ. $4x^2-5x+1<0$

תשובות: 1) א. $3<x<7$. **ב.** $x>3$ או $x<-3$. **ג.** $0\le x\le 5$. **ד.** $-2\le x$ או $x\le -5$.

2) א. $(2,0),(4,0)$. **ב.** חיוביות: $x>4$ או $x<2$; שליליות: $2<x<4$. **ג.** משמאל.



ד. i. $2<x<4$. **ii.** $4\le x$ או $x\le 2$.

3) א. $1<x<2$. **ב.** $2<x<3$. **ג.** $x>2$ או $x<-5$. **ד.** $x\ge 7$ או $x\le 0$.

ה. $x>-1$ או $x<-4$. **ו.** $x>2$ או $x<0.5$. **ז.** $-2\le x\le 6$. **ח.** $x>3$ או $x<-3$. **ט.** אף x.

י. אף x. **יא.** $x\ge 1$ או $x\le -1$. **יב.** אף x. **יג.** כל x. **יד.** $0<x<2.5$. **טו.** $-5<x<5$.

טז. $x\ge 5$ או $x\le 0.2$. **יז.** כל x. **יח.** $1<x<9$. **יט.** $x\neq -4$. **כ.** $0.25<x<1$.

אני מקווה שעזרתי לך ויש לי רק בקשה אחרונה...
סיימת איתי? בבקשה לזרוק אותי לפח למחזור נייר ולא לפח רגיל.... תודה!