מבחן 4 - פתרון מלא

שאלה 1:

זמן השימוש (בשעות) של התלמידים בטלפון במהלך היממה מתפלג נורמלית.

זמן השימוש הממוצע $\bar{x}$ שווה ל־5 שעות וסטיית תקן S_x שווה ל־90 דקות, שהן 1.5 שעות.

לפי ההמלצה הרפואית זמן השימוש של תלמידי התיכון בטלפון צריך להיות עד שעתיים ביממה.

א. נציב את זמן השימוש שעתיים ואת הממוצע וסטיית התקן הנתונים בנוסחה לחישוב ציון תקן:

$$z=\frac{x-\bar{x}}{S} \;\rightarrow\; z=\frac{2-5}{1.5} \;\rightarrow\; z=\frac{-3}{1.5} \;\rightarrow\; z=-2$$

ניעזר בטבלת ערכי z כדי למצוא את אחוז השטח שכלוא מתחת לעקומת ההתפלגות הנורמלית **משמאל** לציון התקן $z=-2$. נתבונן בתא שבשורה **-2.0** ובעמודה **0** ונראה שערכו 0.0228. מכאן נובע שמשמאל לציון תקן זה כלוא 2.28% מהשטח שמתחת לעקומה.

לכן **אחוז התלמידים המשתתפים במחקר ומשך זמן השימוש שלהם עומד בהמלצה הרפואית הוא 2.28%**.

ב. נתון שבמחקר השתתפו 20,000 תלמידי תיכון. בסעיף א' ראינו ש־2.28% מתוכם עומדים בהמלצה הרפואית. נחשב את מספרם באופן הבא:

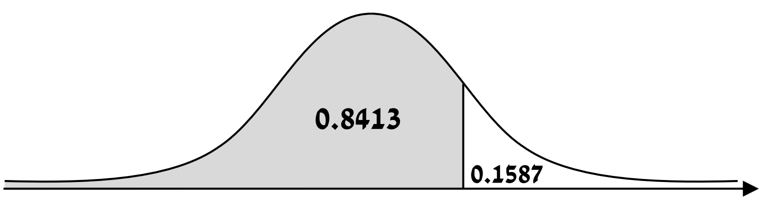
$$0.0228\cdot 20{,}000=456$$

לכן **במחקר השתתפו 456 תלמידים שזמן השימוש שלהם עומד בהמלצה הרפואית**.

ג. 1. עורכי המחקר הזמינו להרצאה את 15.87% המשתתפים שמשתמשים בטלפון t שעות ביממה או יותר.

לכן אחוז המשתתפים שלא הוזמנו להרצאה הוא: $100\%-15.87\%=84.13\%$

ג. 2. ניעזר בטבלת ערכי Z כדי למצוא את ציון התקן שמשמאלו כלוא מתחת לעקומת ההתפלגות 84.13% מהשטח הכולל הכלוא מתחתיה. נתבונן בתא שערכו 0.8413, ונראה שציון התקן המתאים הוא $z=1$.



נציב את ציון התקן שחישבנו עבור זמן השימוש t, ואת הממוצע וסטיית התקן הנתונים בנוסחה לחישוב ציון תקן, ונבודד את זמן השימוש t:

$$z=\frac{x-\bar{x}}{S} \;\rightarrow\; 1=\frac{t-5}{1.5} \;\rightarrow\; 1.5=t-5 \;\rightarrow\; t=6.5$$

ד. נציב את ציון התקן של זמן השימוש של מיטב, ואת הממוצע וסטיית התקן הנתונים בנוסחה לחישוב ציון תקן, ונבודד את זמן השימוש:

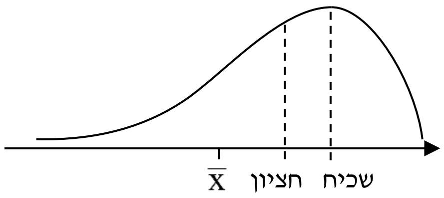
$$z=\frac{x-\overline{x}}{S} \rightarrow 2=\frac{x-5}{1.5} \rightarrow 3=x-5 \rightarrow x=8$$

לפי ההמלצה הרפואית זמן השימוש צריך להיות עד שעתיים ביממה. ההפרש בין זמן השימוש של מיטב לבין הזמן המומלץ הוא 6 שעות ולכן עליו לצמצם את זמן השימוש בטלפון ב־**6 שעות**.

שאלה 2:

התפלגות שנות הותק של סוכנות ביטוח (המשתנה x) היא א־סימטרית שמאלית וסטיית התקן היא $S_x = 5$ (שנים). מירה היא סוכנת ביטוח בעלת 30 שנות ותק, וערך זה הוא השכיח בהתפלגות.

א. כפי שניתן לראות משמאל, בהתפלגות א־סימטרית שמאלית השכיח גדול מהחציון ולכן מירה ותיקה יותר מלפחות 50% מהמשתתפים האחרים בסקר, כלומר **מירה ותיקה יותר מרוב המשתפים בסקר**.



ב. נציב את ציון התקן $z = 2.4$ המתאים לשנות הותק של מירה, את מספר שנות הותק שלה ואת סטיית התקן בנוסחה לחישוב ציון תקן, ונבודד את מספר שנות הותק הממוצע $\bar{x}$:

$$z = \frac{x-\bar{x}}{S} \rightarrow 2.4 = \frac{30-\bar{x}}{5} \rightarrow 12 = 30-\bar{x} \rightarrow \bar{x} = 18 \text{ שנים}$$

ג. המשתנה y מייצג את מספר הלקוחות של סוכנות הביטוח. נתון שסטיית התקן של המשתנה y היא $S_y = 100$ (לקוחות) ושיפוע ישר הרגרסיה המנבא את הקשר בין x ל־y הוא 2.

נציב את הנתונים בנוסחה לחישוב שיפוע ישר הרגרסיה ונבודד את מקדם המתאם r:

$$\frac{S_y}{S_x} \cdot r = m \rightarrow \frac{100}{5} \cdot r = 2 \rightarrow 20r = 2 \rightarrow r = 0.1$$

מצאנו שמקדם המתאם r שווה ל־0.1 ולכן **הקשר שנמצא בין המשתנים הוא חלש**.

ד. 1. נתון: $\bar{y} = 300$. ביחד עם $\bar{x}$ שחישבנו בסעיף ב׳ ושיפוע ישר הרגרסיה $m = 2$ הנתון בסעיף ג׳,
נוכל למצוא את **משוואת ישר הרגרסיה** באמצעות הנוסחה למציאת משוואת ישר על פי נקודה ושיפוע:

$$\tilde{y} - \bar{y} = m \cdot (x - \bar{x}) \rightarrow \tilde{y} - 300 = 2(x-18) \rightarrow \tilde{y} - 300 = 2x - 36 \rightarrow \tilde{y} = 2x + 264$$

ד. 2. נציב $x = 30$ במשוואת ישר הרגרסיה שמצאנו בסעיף ד׳1:

$$\tilde{y} = 2x + 264 \rightarrow \tilde{y} = 2 \cdot 30 + 264 \rightarrow \tilde{y} = 60 + 264 \rightarrow \tilde{y} = 324$$

ולכן עבור 30 שנות הותק של מירה **ישר הרגרסיה מנבא 324 לקוחות**.

שאלה 3:

נסמן ב־x את מספר יוצרי התוכן מתחום משחקי הוידאו.

נתון שמספר יוצרי התוכן מתחום הספורט גדול פי 3 ולכן מספר היוצרים מתחום הספורט שווה ל־$3x$.

שתי קבוצות אלה מהוות ביחד 100% מהמשתתפים ולכן מתקיים:

$$x+3x=100\% \;\rightarrow\; 4x=100\% \;\rightarrow\; x=25\%\;,\;3x=75\%$$

כלומר 25% מיוצרי התוכן הם מתחום משחקי הוידאו ו־75% מיוצרי התוכן הם מתחום הספורט.

נגדיר את המאורעות הבאים:

A = ״לבחור באקראי יוצר מתחום משחקי הוידאו״ $\bar{A}$ = ״לבחור באקראי יוצר מתחום הספורט״

B = ״לבחור באקראי יוצר ותיק״ $\bar{B}$ = ״לבחור באקראי יוצר מתחיל״

כעת נוכל לחשב את ההסתברויות הבאות:

- מצאנו ש־25% מיוצרי התוכן היו מתחום משחקי הוידאו ולכן: $P(A)=0.25$.
- מצאנו ש־75% מיוצרי התוכן היו מתחום הספורט ולכן: $P(\bar{A})=0.75$.
- נתון בשאלה ש־40% מיוצרי התוכן היו ותיקים ולכן: $P(B)=0.4$.
- נתון שיתר היוצרים, המהווים 60%, היו יוצרי תוכן מתחילים ולכן: $P(\bar{B})=0.6$.
- נתון בשאלה ש־30% ממשתתפי הכנס היו יוצרי תוכן ותיקים מתחום הספורט ולכן: $P(\bar{A}\cap B)=0.3$.

הערכים **המודגשים** בטבלה משמאל הם ההסתברויות שחישבנו עד כה. באמצעותם ניתן היה להשלים את הערכים החסרים בשאר התאים בטבלה.

מאורע	A וידאו	$\bar{A}$ ספורט	
B ותיק	0.1	**0.3**	**0.4**
$\bar{B}$ מתחיל	0.15	0.45	**0.6**
	0.25	**0.75**	**1**

א. 1. מהתבוננות בטבלה ניתן לראות ש**ההסתברות לבחור יוצר מתחום הספורט היא** $P(A)=0.75$.

א. 2. מהתבוננות בטבלה ניתן לראות ש**ההסתברות לבחור יוצר ותיק מתחום משחקי הוידאו היא** $P(A\cap B)=0.1$.

ב. זהו סעיף העוסק בהסתברות המותנית $P(B/A)$. נציב את הנתונים מהטבלה בנוסחה לחישוב הסתברות מותנית ונקבל:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.1}{0.25}=0.4$$

ג. המאורעות ״להיות בתחום הספורט״ ($\bar{A}$) ו״להיות יוצר ותיק״ (B) בלתי תלויים זה בזה אם מתקיים השוויון $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$. נציב את הערכים המתאימים מהטבלה ונראה ש:

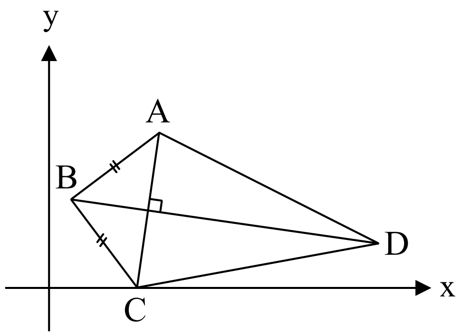
$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= 0.3 \\ P(\bar{A}) \cdot P(B) &= 0.75 \cdot 0.4 = 0.3 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$$

כלומר, השוויון אכן מתקיים ולכן **המאורעות הם בלתי תלויים**.

ד. בסעיף א׳2 ראינו שההסתברות לבחור יוצר ותיק מתחום משחקי הוידאו היא: $P(A \cap B) = 0.1$. נתון שמספרם הוא 26 משתתפים. נסמן ב־x את סך כל יוצרי התוכן שהגיעו לכנס ונקבל את המשוואה:

$$0.1 \cdot x = 26 \quad \rightarrow \quad x = 260$$

לכן, **לכנס הגיעו 260 יוצרי תוכן**.



שאלה 4:

בדלתון ABCD נתון: $AD=CD$, $AB=BC$.

הקודקוד C נמצא על ציר ה־x. נתון: $A\,(5\,,7)$, $B\,(1\,,4)$.

שיעור ה־x של הקודקוד C גדול משיעור ה־x של הקודקוד B.

א. 1. נחשב את אורך הצלע AB באמצעות הנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d_{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} \;\rightarrow\; d_{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(7-4)^2} \;\rightarrow\; d_{AB}=\sqrt{4^2+3^2}$$

$$\rightarrow\; d_{AB}=\sqrt{16+9} \;\rightarrow\; d_{AB}=\sqrt{25} \;\rightarrow\; d_{AB}=5$$

ולכן: $AB=$ 5 יח'. נתון ש־$AB=BC$ ולכן מתקיים בנוסף: $BC=$ 5 יח'.

הקודקוד C נמצא על ציר ה־x ולכן מתקיים: $y_C=0$. כיוון שאורך הצלע BC שווה ל־5 יח' נוכל להציב את שיעורי הנקודות B ו־C בנוסחה למציאת מרחק בין נקודות ולבודד את שיעור ה־x של הנקודה C:

$$d_{BC}=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} \;\rightarrow\; 5=\sqrt{(x_C-1)^2+(0-4)^2} \;\rightarrow\; 5=\sqrt{(x_C-1)^2+(-4)^2}$$

$$\rightarrow\; 5=\sqrt{(x_C-1)^2+16} \;\rightarrow\; 25=(x_C-1)^2+16 \;\rightarrow\; (x_C-1)^2=9\,\Big/\pm\sqrt{\ } \;\rightarrow\; x_C-1=\pm 3$$

לאחר הוצאת השורש ישנן שתי אפשרויות. האפשרות הראשונה היא: $x_C-1=-3 \;\rightarrow\; \cancel{x_C=-2}$

אך אפשרות זו נפסלת כיוון ש־$x_B=1$ ונתון ש־$x_B<x_C$.

האפשרות שנותרה היא: $x_C-1=3 \;\rightarrow\; x_C=4$

לכן, שיעורי הנקודה C הם: **$C\,(4\,,0)$**.

א. 2. נחשב את שיפוע הישר עליו מונח הקטע AC באמצעות שיעורי הנקודות A ו־C:

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C} \;\rightarrow\; m_{AC}=\frac{7-0}{5-4} \;\rightarrow\; m_{AC}=\frac{7}{1} \;\rightarrow\; m_{AC}=7$$

אלכסוני הדלתון ABCD מאונכים זה לזה ולכן מכפלת שיפועי הישרים עליהם מונחים הקטעים AC ו-BD שווה ל־1-. נרכיב משוואה מתאימה ונחשב את השיפוע m_{BD}:

$$m_{BD}\cdot m_{AC}=-1 \;\rightarrow\; m_{BD}\cdot 7=-1 \;\rightarrow\; m_{BD}=-\frac{1}{7}$$

כעת נוכל למצוא את **משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD** באמצעות הנוסחה למציאת משוואת ישר בעזרת השיפוע שמצאנו ושיעורי הנקודה B:

$$y-y_B=m_{BD}(x-x_B) \;\rightarrow\; y-4=-\frac{1}{7}(x-1) \;\rightarrow\; y-4=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7} \;\rightarrow\; y=-\frac{1}{7}x+4\frac{1}{7}$$

א. 3. נחשב את **אורך האלכסון AC** באמצעות הנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d_{AC}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2} \ \rightarrow\ d_{AC}=\sqrt{(5-4)^2+(7-0)^2} \ \rightarrow\ d_{AC}=\sqrt{1^2+7^2}$$
$$\rightarrow\ d_{AC}=\sqrt{1+49} \ \rightarrow\ d_{AC}=\sqrt{50}$$

ולכן: $AC=\sqrt{50}=7.071$ יח׳.

ב. 1. נתון ששיעור ה־y של הנקודה D הוא 2. הנקודה D נמצאת על הישר עליו מונח האלכסון BD ולכן שיעורי הנקודה מקיימים את משוואת הישר. לכן נוכל למצוא את שיעור ה־x של הנקודה D באמצעות הצבת $y_D=2$ במשוואת הישר שמצאנו בסעיף א׳2:

$$y_D=-\frac{1}{7}x_D+4\frac{1}{7} \ \rightarrow\ 2=-\frac{1}{7}x_D+4\frac{1}{7} \ \rightarrow\ -2\frac{1}{7}=-\frac{1}{7}x_D \ \rightarrow\ x_D=15$$

לכן שיעורי הנקודה D הם: $D\ (15,2)$.

כעת נוכל לחשב את **אורך הצלע AD** באמצעות הנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

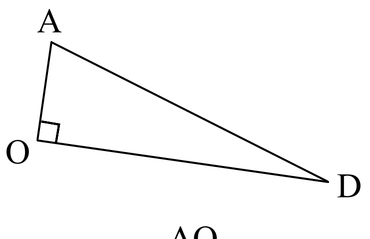
$$d_{AD}=\sqrt{(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2} \ \rightarrow\ d_{AD}=\sqrt{(5-15)^2+(7-2)^2} \ \rightarrow\ d_{AD}=\sqrt{(-10)^2+5^2}$$
$$\rightarrow\ d_{AD}=\sqrt{100+25} \ \rightarrow\ d_{AD}=\sqrt{125}$$

ולכן: $AD=\sqrt{125}=11.18$ יח׳.

ב. 2. נסמן את נקודת חיתוך האלכסונים AC ו־BD ב־O. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את האלכסון המשני ולכן:

$$AO=0.5\cdot AC \ \rightarrow\ AO=0.5\cdot\sqrt{50} \ \rightarrow\ AO=3.54 \text{ ס״מ}$$

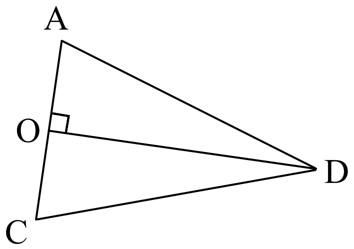
כמו כן, אלכסוני הדלתון מאונכים זה לזה ולכן: $\sphericalangle AOD=90^\circ$.



נתבונן במשולש ישר הזווית ΔAOD. מצאנו את אורכי הניצב AO והיתר AD, ולכן נוכל לחשב את גודל הזווית $\sphericalangle OAD$ בעזרת cos באופן הבא:

$$\cos\sphericalangle OAD=\frac{AO}{AD} \ \rightarrow\ \cos\sphericalangle OAD=\frac{0.5\cdot\sqrt{50}}{\sqrt{125}} \ \rightarrow\ \sphericalangle OAD=71.565^\circ$$

לכן עבור הזווית $\sphericalangle CAD$ מתקיים: $\boldsymbol{\sphericalangle CAD=71.565^\circ}$.



ב. 3. אורכי הצלעות AC ו־AD חושבו בסעיפים א׳3 וב׳1.

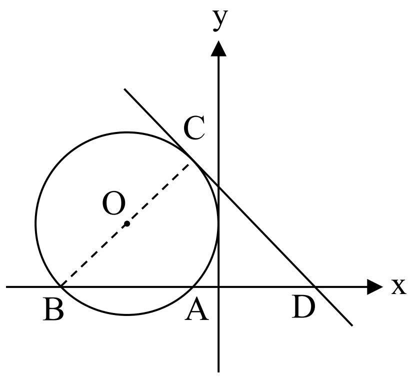
נציב אורכים אלו ואת הזווית $\sphericalangle CAD$ שמצאנו בסעיף ב׳2

בנוסחה לחישוב שטח משולש בעזרת טריגונומטריה, ונקבל:

$$S_{\Delta CAD}=\frac{AC\cdot AD\cdot \sin\sphericalangle CAD}{2}=\frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{125}\cdot\sin 71.565^\circ}{2}=37.5$$

לכן, **שטח המשולש ΔCAD הוא 37.5 יח״ר**.

שאלה 5:



מעגל שמרכזו בנקודה O (-5 , 3) חותך את ציר ה־x בנקודות A ו־B.

נתון: A (-1 , 0).

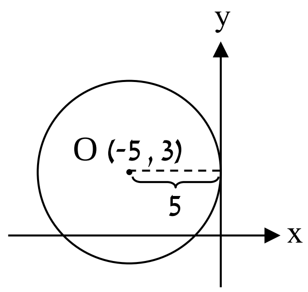
א. הנקודה A נמצאת על המעגל ולכן נוכל לחשב את אורך הרדיוס באמצעות הצבת שיעורי הנקודות A ו־O בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d_{AO}=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2} \;\rightarrow\; d_{AO}=\sqrt{(-1-(-5))^2+(0-3)^2} \;\rightarrow\; d_{AO}=\sqrt{4^2+(-3)^2}$$
$$\rightarrow\; d_{AO}=\sqrt{16+9} \;\rightarrow\; d_{AO}=\sqrt{25} \;\rightarrow\; d_{AO}=5$$

לכן רדיוס המעגל שווה באורכו ל־5 יח'.

נציב **במשוואת המעגל** את שיעורי המרכז O ואת אורך הרדיוס שחישבנו ונקבל:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \;\rightarrow\; (x-(-5))^2+(y-3)^2=5^2 \;\rightarrow\; (x+5)^2+(y-3)^2=25$$



ב. שיעור ה־x של מרכז המעגל שווה ל־5- ולכן המרחק שלו מציר ה־y שווה ל־5 יח' אורך. מרחק זה שווה בדיוק לאורך רדיוס המעגל ולכן ניתן להסיק ש**המעגל משיק לציר ה־y**.

ג. הנקודה B היא אחת משתי נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה־x.

נציב במשוואת המעגל $y=0$ ונבודד את x כדי למצוא את שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה־x:

$$(x+5)^2+(0-3)^2=25 \;\rightarrow\; (x+5)^2+(-3)^2=25 \;\rightarrow\; (x+5)^2+9=25 \;\rightarrow\; (x+5)^2=16$$
$$\rightarrow\; x+5=\pm4 \;\rightarrow\; \cancel{x_1=-1}\;,\; x_2=-9$$

נפסול את הפתרון $x=-1$ כיוון שזה שיעור ה־x של נקודת החיתוך הנתונה A ונסיק ש: **B (-9 , 0)**.

ד. 1. נתון שהקטע BC הוא קוטר ולכן מרכז המעגל O היא נקודת אמצע הקטע BC. נמצא את שיעורי הנקודה C באמצעות הנוסחה למציאת אמצע קטע:

$$x_O=\frac{x_B+x_C}{2} \;\rightarrow\; -5=\frac{-9+x_C}{2} \;\rightarrow\; -10=-9+x_C \;\rightarrow\; x_C=-1$$

$$y_O=\frac{y_B+y_C}{2} \;\rightarrow\; 3=\frac{0+y_C}{2} \;\rightarrow\; 3=\frac{y_C}{2} \;\rightarrow\; y_C=6$$

לכן, שיעורי הנקודה C הם: **C (-1 , 6)**.

ד. 2. נחשב את שיפוע הישר עליו מונח הרדיוס OC באמצעות שיעורי הנקודות O ו־C:

$$m_{OC}=\frac{y_C-y_O}{x_C-x_O} \;\rightarrow\; m_{OC}=\frac{6-3}{-1-(-5)} \;\rightarrow\; m_{OC}=\frac{3}{-1+5} \;\rightarrow\; m_{OC}=\frac{3}{4}$$

משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה ולכן המשיק בנקודה C מאונך לרדיוס OC. מכפלת שיפועי ישרים מאונכים שווה ל־1- ולכן נרכיב משוואה מתאימה ונבודד את שיפוע הישר עליו מונח המשיק:

$$m\cdot m_{OC}=-1 \;\rightarrow\; m\cdot\frac{3}{4}=-1 \;\rightarrow\; m\cdot 3=-4 \;\rightarrow\; m=-1\frac{1}{3}$$

הישר עליו מונח המשיק בנקודה C עובר דרך הנקודה C (-1 , 6) ומצאנו ששיפועו $-1\frac{1}{3}$. לכן נוכל למצוא את משוואת הישר באמצעות הנוסחה למציאת משוואת ישר בעזרת שיפוע ונקודה:

$$y-y_c=m(x-x_c) \;\rightarrow\; y-6=-1\frac{1}{3}(x-(-1)) \;\rightarrow\; y-6=-1\frac{1}{3}(x+1) \;\rightarrow\; y-6=-1\frac{1}{3}x-1\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow\; y=-1\frac{1}{3}x+4\frac{2}{3}$$

שאלה 6:

נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x-10}{x^2-b^2}$, $(0<b)$.

א. אסימפטוטה אנכית: נמצא עבור אילו ערכי x המכנה של פונקציית המנה $f(x)$ מתאפס:

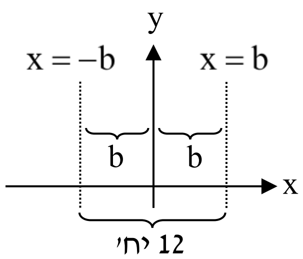
$$x^2-b^2=0 \;\rightarrow\; x^2=b^2 \,/\, \pm\sqrt{\ } \;\rightarrow\; x=\pm b$$

לכן $x=b$ ו־$x=-b$ הן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

אסימפטוטה אופקית: בפונקציית המנה $f(x)$, מעריך החזקה הגבוהה ביותר של x במונה הוא 1 ומעריך החזקה הגבוהה ביותר של x במכנה הוא 2. מעריך החזקה במכנה גבוה יותר ולכן לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y=0$.

לסיכום, האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ הן: $x=b$, $x=-b$ ו־$y=0$.

ב. נתון שהמרחק בין האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$ הוא 12 יח' אורך ולכן נקבל את המשוואה:



$$b-(-b)=12 \;\rightarrow\; b+b=12 \;\rightarrow\; 2b=12 \;\rightarrow\; b=6$$

נציב $b=6$ בפונקציה ונקבל: $f(x)=\dfrac{x-10}{x^2-36}$. לכן האסימפטוטות האנכיות הן: $x=\pm 6$ ותחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x\neq\pm 6$ בהתאם.

ג. 1. נגזור את הפונקציה $f(x)$ לפי הנוסחה לנגזרת מנה:

$$f(x)=\frac{u}{v} \;\rightarrow\; f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-36)-(x-10)\cdot 2x}{(x^2-36)^2}=\frac{x^2-36-2x^2+20x}{(x^2-36)^2}=\frac{-x^2+20x-36}{(x^2-36)^2}$$

נשווה את הנגזרת ל־0 למציאת הנקודות החשודות כקיצון:

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{-x^2+20x-36}{(x^2-36)^2}=0 \;\rightarrow\; -x^2+20x-36=0 \;\rightarrow\; x_1=2\,,\,x_2=18$$

נציב בטבלת עלייה וירידה את הנקודות החשודות כקיצון ואת תחום ההגדרה $x\neq\pm 6$:

ערכי x	$x<-6$	$x=-6$	$-6<x<2$	$x=2$	$2<x<6$	$x=6$	$6<x<18$	$x=18$	$18<x$
סימן הנגזרת	-	לא מוגדרת	-	מתאפסת	+	לא מוגדרת	+	מתאפסת	-
הפונקציה עולה / יורדת	↘	לא מוגדרת	↘	min	↗	לא מוגדרת	↗	max	↘

מהטבלה נוכל להסיק ש־$x=2$ היא נקודת קיצון מסוג מינימום ו־$x=18$ היא נקודת קיצון מסוג מקסימום.

נמצא את שיעורי ה־y של נקודות הקיצון באמצעות הצבת שיעורי ה־x ב־$f(x)$:

$$f(2)=\frac{2-10}{2^2-36} \rightarrow f(2)=\frac{-8}{4-36} \rightarrow f(2)=\frac{-8}{-32} \rightarrow f(2)=0.25$$

$$f(18)=\frac{18-10}{18^2-36} \rightarrow f(18)=\frac{8}{324-36} \rightarrow f(18)=\frac{8}{288} \rightarrow f(18)=\frac{1}{36}\approx 0.028$$

לסיכום, נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן : **$\max(18\,,0.028)$** ו־**$\min(2\,,0.25)$**.

ג. 2. חיתוך עם ציר ה־x :

$$f(x)=0 \rightarrow \frac{x-10}{x^2-36}=0 \rightarrow x-10=0 \rightarrow x=10$$

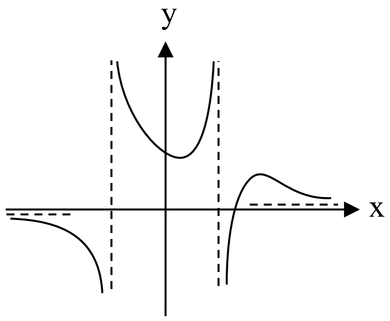
לכן **נקודת החיתוך עם ציר ה־x היא: $(10\,,0)$**.

חיתוך עם ציר ה־y :

$$f(0)=\frac{0-10}{0^2-36} \rightarrow f(0)=\frac{-10}{-36} \rightarrow f(0)=\frac{5}{18}\approx 0.278$$

לכן **נקודת החיתוך עם ציר ה־y היא: $(0\,,0.278)$**.

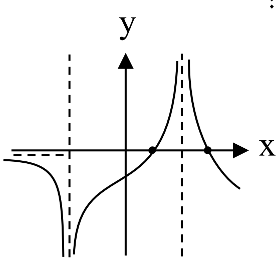
ד. על סמך החקירה שביצענו בסעיף ג׳ מתקבל השרטוט הבא :



ה. לפי טבלת העלייה והירידה מסעיף ג׳1 אנו יודעים מהם תחומי החיוביות והשליליות של הנגזרת $f'(x)$:

- תחום **החיוביות** בו גרף הנגזרת **מעל** לציר ה־x : $6<x<18$, $2<x<6$.
- תחום **השליליות** בו גרף הנגזרת **מתחת** לציר ה־x : $18<x$, $-6<x<2$, $x<-6$.

מבין הגרפים האפשריים רק **גרף III** מתאים לתיאור זה ולכן גרף הנגזרת $f'(x)$ הוא :



שאלה 7:

נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{a}{x^2}+x^2$.

אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ נמצאת על הישר $x=2$.

א. נגזור את הפונקציה $f(x)$ לפי הנוסחה לנגזרת מנה:

$$f(x)=\frac{u}{v} \;\rightarrow\; f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$f'(x)=\frac{0\cdot x^2-a\cdot 2x}{(x^2)^2}+2x=\frac{-2ax}{x^4}+2x=-\frac{2a}{x^3}+2x$$

נתון ששיעור ה־x של אחת מנקודות הקיצון הוא 2. נציב את הערך $x=2$ בנגזרת ונשווה אותה ל־0:

$$f'(2)=0 \;\rightarrow\; -\frac{2a}{2^3}+2\cdot 2=0 \;\rightarrow\; -\frac{2a}{8}+4=0 \;\rightarrow\; -\frac{2a}{8}=-4 \;\rightarrow\; -2a=-32 \;\rightarrow\; a=16$$

ב. 1. נציב $a=16$ בפונקציה, ונקבל: $f(x)=\frac{16}{x^2}+x^2$ ו־ $f'(x)=-\frac{32}{x^3}+2x$.

באמצעות מכנה משותף נסדר מחדש את הפונקציה $f(x)$ באופן הבא:

$$f(x)=\frac{16}{x^2}+x^2 \;\rightarrow\; f(x)=\frac{16}{x^2}+\frac{x^2\cdot x^2}{x^2} \;\rightarrow\; f(x)=\frac{16}{x^2}+\frac{x^4}{x^2} \;\rightarrow\; f(x)=\frac{16+x^4}{x^2}$$

אסימפטוטה אנכית: נמצא עבור אילו ערכי x המכנה של פונקציית המנה $f(x)$ מתאפס:

$$x^2=0 \;\rightarrow\; x=0$$

לכן $x=0$ היא האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$.

אסימפטוטה אופקית: בפונקציית המנה $f(x)$, מעריך החזקה הגבוהה ביותר של x במונה הוא 4 ומעריך החזקה הגבוהה ביותר של x במכנה הוא 2. מעריך החזקה במונה גבוה יותר ולכן לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.

ב. 2. נשווה את הנגזרת ל־0 למציאת הנקודות החשודות כקיצון:

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; -\frac{32}{x^3}+2x=0 \;\rightarrow\; 2x=\frac{32}{x^3} \;\rightarrow\; 2x^4=32 \;\rightarrow\; x^4=16\;/\pm\sqrt{\ } \;\rightarrow\; x=\pm 2$$

נציב בטבלת עלייה וירידה את הנקודות החשודות כקיצון ואת תחום ההגדרה $x \neq 0$:

ערכי x	$2<x$	$x=2$	$0<x<2$	$x=0$	$-2<x<0$	$x=-2$	$x<-2$
סימן הנגזרת	+	מתאפסת	-	לא מוגדרת	+	מתאפסת	-
הפונקציה עולה / יורדת	↗	min	↘	לא מוגדרת	↗	min	↘

מהטבלה נוכל להסיק ש־$x=2$ ו־$x=-2$ הן נקודות קיצון מסוג מינימום.

נמצא את שיעורי ה־y של נקודות הקיצון באמצעות הצבת שיעורי ה־x ב־$f(x)$:

$$f(2)=\frac{16}{2^2}+2^2 \rightarrow f(2)=\frac{16}{4}+4 \rightarrow f(2)=4+4 \rightarrow f(2)=8$$

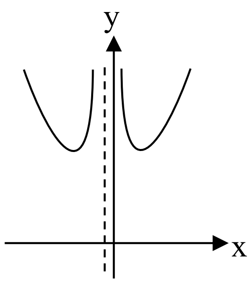
$$f(-2)=\frac{16}{(-2)^2}+(-2)^2 \rightarrow f(-2)=\frac{16}{4}+4 \rightarrow f(-2)=4+4 \rightarrow f(-2)=8$$

לסיכום, נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן: min(2 , 8) ו־min1(-2 , 8).

ב. 3. בעזרת טבלת העלייה והירידה שבנינו בסעיף ב׳2 נסיק ש :

- **תחומי העלייה של הפונקציה** הם: $2<x$ או $-2<x<0$.
- **תחומי הירידה של הפונקציה** הם: $2>x>0$ או $x<-2$.

ג. על סמך החקירה שביצענו בסעיף ב׳ מתקבל השרטוט הבא:

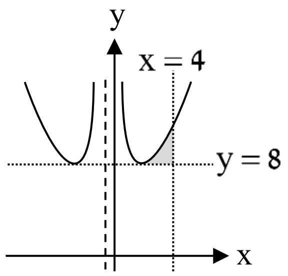


ד. שיעורי ה־y של שתי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ זהים ולכן הישר העובר ביניהם מקביל לציר ה־x.

כיוון ששיעור ה־y של שתי נקודות הקיצון הוא 8, משוואת הישר המתאימה תהיה: $y=8$.

(המשך בעמוד הבא)

ה. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק $y=8$ והישר $x=4$ הוא השטח האפור בשרטוט משמאל. השטח מוגבל מלמעלה על ידי הפונקציה $f(x)$, מלמטה על ידי המשיק $y=8$ ונמצא בתחום: $2\le x\le 4$. לכן נוכל לחשב אותו באמצעות האינטגרל הבא:

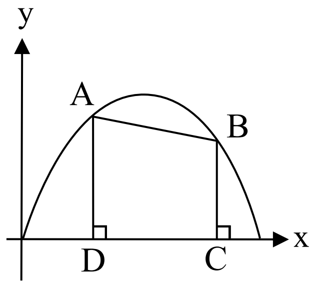


$$S=\int_2^4[f(x)-8]dx=\int_2^4(\frac{16}{x^2}+x^2-8)dx=\int_2^4(16x^{-2}+x^2-8)dx=\frac{16x^{-1}}{-1}+\frac{x^3}{3}-8x\Big|_2^4=-\frac{16}{x}+\frac{x^3}{3}-8x\Big|_2^4$$

$$=(-\frac{16}{4}+\frac{4^3}{3}-8\cdot 4)-(-\frac{16}{2}+\frac{2^3}{3}-8\cdot 2)=(-14\frac{2}{3})-(-21\frac{1}{3})=-14\frac{2}{3}+21\frac{1}{3}=6\frac{2}{3}$$

כלומר, השטח המבוקש הוא: $6\frac{2}{3}$ יח"ר.

שאלה 8:



הנקודות A ו־B נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+15x$ ברביע הראשון.

מהנקודות A ו־B הורידו אנכים לציר ה־x כך שהתקבל הטרפז ABCD כמתואר בשרטוט.

נסמן ב־t את שיעור ה־x של הנקודה A.

שימו לב! נתון שהנקודה A נמצאת ברביע הראשון ולכן ערכי t האפשריים נמצאים בטווח שבין נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה־x. נמצא את שיעורי ה־x של נקודות החיתוך באופן הבא:

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; -x^2+15x=0 \;\rightarrow\; -x(x-15)=0 \;\rightarrow\; x_1=0\,,\,x_2=15$$

ולכן עבור שיעור ה־x של הנקודה A מתקיים: $0<t<15$.

א. נתון ששיעור ה־x של הנקודה B גדול פי 3 משיעור ה־x של הנקודה A ולכן: $x_B=3t$.

כיוון שהנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ נוכל לבטא את שיעור ה־y של הנקודה באמצעות t על ידי הצבת שיעור ה־x שלה בפונקציה $f(x)$:

$$f(x_B)=-{x_B}^2+15x_B \;\rightarrow\; f(3t)=-(3t)^2+15\cdot 3t \;\rightarrow\; f(3t)=-9t^2+45t$$

לכן שיעורי הנקודה B הם: $B(3t,-9t^2+45t)$.

ב. כדי לבטא באמצעות t את שטח הטרפז ABCD נמצא את אורכי הבסיסים AD ו־BC והגובה CD.

הבסיס BC מקביל לציר ה־y ולכן אורכו שווה להפרש בין שיעור ה־y של הנקודה B לבין שיעור ה־y של הנקודה C. הנקודה C נמצאת על ציר ה־x ולכן:

$$BC=y_B-y_C \;\rightarrow\; BC=-9t^2+45t-0 \;\rightarrow\; BC=-9t^2+45t$$

הבסיס AD מקביל לציר ה־y ולכן אורכו שווה להפרש בין שיעור ה־y של הנקודה A לבין שיעור ה־y של הנקודה D. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ולכן נוכל לבטא את שיעור ה־y של הנקודה באמצעות t על ידי הצבת שיעור ה־x שלה בפונקציה $f(x)$:

$$f(x_A)=-{x_A}^2+15x_A \;\rightarrow\; y_A=-t^2+15t$$

הנקודה D נמצאת על ציר ה־x ולכן:

$$AD=y_A-y_D \;\rightarrow\; AD=-t^2+15t-0 \;\rightarrow\; AD=-t^2+15t$$

הגובה CD מונח על ציר ה־x ולכן אורכו שווה להפרש בין שיעורי ה־x של נקודות הקצה C ו־D. הבסיסים BC ו־AD מקבילים לציר ה־y ולכן מתקיים: $x_C = x_B = 3t$ וגם: $x_D = x_A = t$. מכאן נובע ש:

$$CD = x_C - x_D \;\rightarrow\; CD = 3t - t \;\rightarrow\; CD = 2t$$

כעת נוכל לבטא את שטח הטרפז באמצעות הנוסחה המתאימה:

$$S_{ABCD} = \frac{(BC + AD)\cdot CD}{2} \;\rightarrow\; S_{ABCD} = \frac{\left[-9t^2 + 45t + (-t^2 + 15t)\right]\cdot \cancel{2}t}{\cancel{2}}$$

$$\rightarrow\; S_{ABCD} = (-9t^2 + 45t - t^2 + 15t)\cdot t \;\rightarrow\; S_{ABCD} = (-10t^2 + 60t)\cdot t \;\rightarrow\; S_{ABCD} = -10t^3 + 60t^2$$

ג. פונקציית המטרה המייצגת את שטח הטרפז שמצאנו בסעיף ב׳ היא: $g(t) = -10t^3 + 60t^2$

בתחילת השאלה ראינו שמתקיים $0 < t < 15$ ולכן זהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(t)$ שמצאנו.

כעת נגזור את הפונקציה $g(t)$: $g'(t) = -30t^2 + 120t$

נשווה את הנגזרת $g'(t)$ ל־0 כדי למצוא את הנקודות החשודות כקיצון:

$$g'(t) = 0 \;\rightarrow\; -30t^2 + 120t = 0 \;\rightarrow\; -30t(t-4) = 0 \;\rightarrow\; \cancel{t_1 = 0},\; t_2 = 4$$

האפשרות $t_1 = 0$ נפסלת כיוון שערך ה־t נמצא מחוץ לתחום ההגדרה $0 < t < 15$.

כעת נוודא את סוג הקיצון של הפונקציה $g(t)$ בעזרת טבלת עלייה וירידה. כפי שניתן לראות משמאל הנקודה שמצאנו היא אכן נקודת מקסימום.

	$4 < t < 15$	$t = 4$	$0 < t < 4$
$g'(t)$	-	מתאפסת	+
$g(t)$	↘	max	↗

נמצא את שיעור ה־y של הנקודה A באמצעות הצבת ערך ה־t שמצאנו:

$$y_A = -t^2 + 15t \;\rightarrow\; y_A = -4^2 + 15\cdot 4 \;\rightarrow\; y_A = -16 + 60 \;\rightarrow\; y_A = 44$$

לסיכום, שיעורי הנקודה A שבעבורה יהיה שטח הטרפז ABCD מקסימלי הם: **A (4 , 44)**.

ד. שטח הטרפז ABCD הוא מקסימלי כאשר $t = 4$. נמצא את שיעורי הנקודה B המתאימים:

$$x_B = 3t \;\rightarrow\; x_B = 3\cdot 4 \;\rightarrow\; x_B = 12$$

$$y_B = -9t^2 + 45t \;\rightarrow\; y_B = -9\cdot 4^2 + 45\cdot 4 \;\rightarrow\; y_B = 36$$

לכן כאשר שטח הטרפז ABCD מקסימלי שיעורי הנקודות A ו־B הם: A (4 , 44) ו־B (12 , 36).

נחשב את שיפוע הישר עליו מונח הקטע AB באמצעות שיעורי הנקודות A ו־B:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \;\rightarrow\; m_{AB} = \frac{44 - 36}{4 - 12} \;\rightarrow\; m_{AB} = \frac{8}{-8} \;\rightarrow\; m_{AB} = -1$$