התפלגות נורמלית

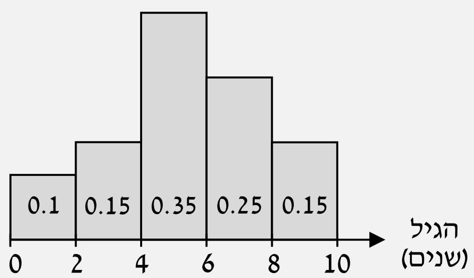
תזכורת! מהי היסטוגרמה?

היסטוגרמה היא הצגה גרפית של נתונים סטטיסטיים המסייעת לנו כאשר המשתנה כמותי **רציף**.
כאשר עסקנו **בדיאגרמת עמודות**, המשתנה שהופיע על ציר ה־x היה כמותי **בדיד**. דוגמאות למשתנים מסוג זה הן: מספר נרשמים לחוג, מספר ביקורים בקולנוע או מספר הקומות בבניין.
דיאגרמת עמודות אינה מתאימה כאשר המשתנה **כמותי רציף**. לדוגמה, כאשר המשתנה הרציף הוא גיל הילד, נצטרך אינספור עמודות נפרדות עבור הגילים 7.3, 7.46, 7.061 וכך הלאה.
לכן, במשתנה כמותי רציף נציג את השכיחות או את השכיחות היחסית של **טווח ערכים** על ידי היסטוגרמה. נדגים זאת בעזרת טבלת שכיחויות המציגה את התפלגות הגיל של ילדי הכפר:

x - הגיל (שנים)	$8 < x \le 10$	$6 < x \le 8$	$4 < x \le 6$	$2 < x \le 4$	$0 < x \le 2$
f - מספר הילדים	30	50	70	30	20
השכיחות היחסית	15%	25%	35%	15%	10%

המשתנה ״הגיל״ הוא משתנה כמותי רציף הכולל את כל הגילים האפשריים בין 0 לבין 10.
בטבלה הנתונה כל עמודה נקראת ״קטגוריה״, והיא מציגה **טווח** ערכים.
״הרוחב״ של כל קטגוריה הוא שנתיים: $0 < x \le 2$, $2 < x \le 4$ וכך הלאה.

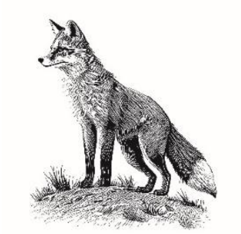
היסטוגרמה מציגה עמודות כמלבנים צמודים. בהיסטוגרמות שנעסוק בהן **שטחי המלבנים מייצגים את השכיחות היחסית** של כל אחד מטווחי הערכים.
נדגים זאת בעזרת טבלת השכיחויות שהצגנו מעל.
בדוגמה זו, ציר ה־x מייצג את **המשתנה** ״הגיל״. **רוחב העמודה** על ציר ה־x מייצג את טווח הערכים שהופיע בטבלה (הקטגוריה). יש להקפיד שכל הקטגוריות בטבלה יהיו בעלות רוחב **שווה**.
שטח העמודה מייצג את השכיחות של אותו טווח.
לדוגמה, השכיחות היחסית של ילדים שטווח גיליהם הוא 2-0 שנים, היא 0.1, וזהו שטח המלבן השמאלי.



ההיסטוגרמה מסייעת לנו להבנה אינטואיטיבית מהירה יותר של הנתונים. בדוגמה זו ניתן לזהות ישירות שבטווח הגילים האמצעי, גילי 6-4, השכיחות היחסית היא הגבוהה ביותר, בעוד שבטווחים שבקצה היא נמוכה יחסית.
נוח גם לראות שהשכיחות היחסיות של טווחי הגילים 4-2 שנים ו־10-8 שנים זהות זו לזו.

1. בשמורת טבע שקלו את כל השועלים (בקילוגרמים), והציגו את המשקלים בטבלה שלפניכם:

x - המשקל (ק״ג)	$14 < x \le 17$	$11 < x \le 14$	$8 < x \le 11$	$5 < x \le 8$	$2 < x \le 5$
f - מספר השועלים	5	7	2	2	4
שכיחות יחסית באחוזים					

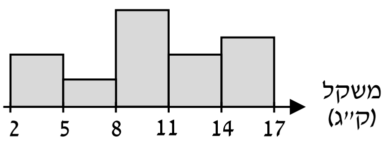


א. מהו המשתנה המופיע בטבלה? מהו סוג המשתנה?

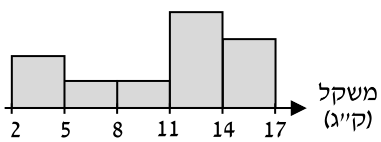
ב. השלימו את השורה התחתונה בטבלה.

ג. לפניכם שלוש היסטוגרמות. קבעו איזו מהן מתאימה לטבלה:

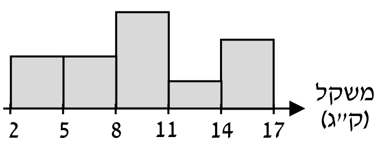
I.



II.



III.



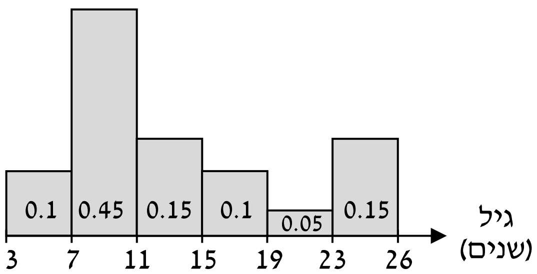
ד. האם ייתכן שבגן החיות אין שועל שמשקלו 16 ק״ג? הסבירו.

ה. באיזה מהמלבנים בהיסטוגרמה כלול השועל שמשקלו הוא:

1. החציון. 2. העשירון התשיעי. 3. הרביעון הראשון.

2. ההיסטוגרמה שלפניכם מציגה שכיחויות יחסיות של הגילים באוכלוסייה שהגיעה למרפאה החודש.

בשאלה זו הערך העליון בכל קטגוריה **כלול** בה,
והערך התחתון **אינו כלול** בה.



א. האם בעזרת ההיסטוגרמה ניתן לקבוע כמה ילדים בגילאי 3-7 ביקרו החודש במרפאה? הסבירו.

ב. האם בעזרת ההיסטוגרמה ניתן לקבוע שמספר הילדים בגילאי 3-7 שהגיעו למרפאה נמוך ממספר הילדים בגילאי 11-15 שהגיעו למרפאה? הסבירו.

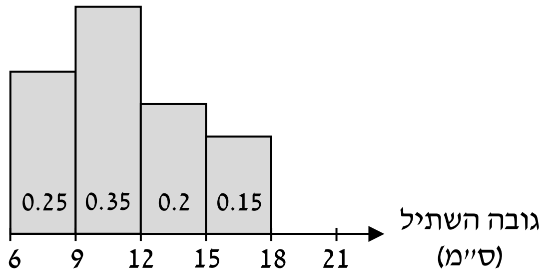
ג. באיזה מהמלבנים בהיסטוגרמה כלול הילד שמשקלו הוא:

1. החציון. 2. העשירון השלישי. 3. הרביעון השלישי.

ד. ידוע שהחודש ביקרו במרפאה רק 30 מטופלים שגילם גבוה מ־23.

1. כמה מטופלים ביקרו החודש במרפאה?

2. כמה מטופלים שגילם נמוך מ־7 או שווה לו ביקרו החודש במרפאה?



3. ההיסטוגרמה שלפניכם מציגה את התפלגות הגובה של שתילים בחממה (בסנטימטרים).

א. השלימו את המלבן המתאים לקטגוריה הימנית בהיסטוגרמה (18-21 ס״מ).

ב. השלימו את השורה התחתונה בטבלה בעזרת ההיסטוגרמה:

x - גובה השתיל (ס״מ)	$18 < x \le 21$	$15 < x \le 18$	$12 < x \le 15$	$9 < x \le 12$	$6 < x \le 9$
f - מספר השתילים					
שכיחות יחסית באחוזים					

ג. באיזה מהמלבנים בהיסטוגרמה כלול השתיל שגובהו הוא:

1. העשירון הרביעי. 2. העשירון השני. 3. הרביעון השני.

ד. נתון שגובהם של 96 שתילים הוא יותר מ־12 ס״מ.

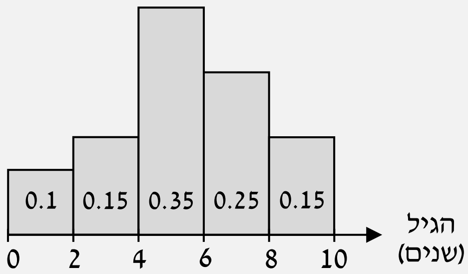
1. חשבו כמה שתילים נכללו בהתפלגות שהוצגה בהיסטוגרמה.
2. מלאו את השורה האמצעית בטבלה.

מהי התפלגות?

בעזרת ההיסטוגרמה נוכל להסביר מושג מרכזי בסטטיסטיקה הנקרא **התפלגות**.

התפלגות הערכים של משתנה היא ההתאמה בין כל ערך לבין השכיחות היחסית של אותו ערך.

ההיסטוגרמה משמאל הופיעה בתחילת הפרק. היא מציגה את השכיחות היחסית של כל טווח גילים, ומאפשרת לנו לזהות לאילו ערכים יש שכיחות יחסית גבוהה יותר.

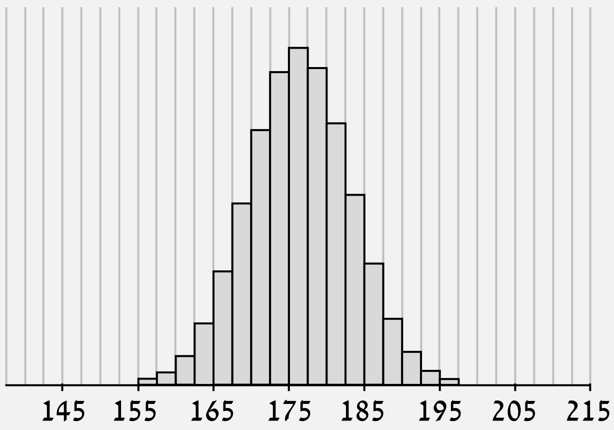


בהתפלגות זו ניתן לזהות שבטווח הגילים האמצעי השכיחות היחסית היא **הגבוהה ביותר**, ובטווחים הקיצוניים היא **נמוכה יחסית**.

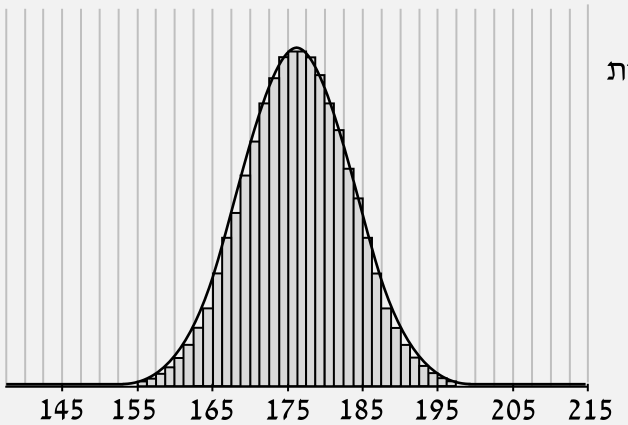
למעשה, השכיחות היחסית של ערך היא **ההסתברות** לקבל את אותו ערך בבחירה אקראית.
לדוגמה, השכיחות היחסית של טווח הגילים 4-6 שנים היא 35%. בהתאם, אם נבחר באקראי ילד מבין הילדים שגיליהם מופיעים בהיסטוגרמה, ההסתברות שייבחר ילד שגילו 4-6 שנים היא 0.35.

מהי התפלגות נורמלית?

ישנם סוגים שונים של התפלגויות. אחת מההתפלגויות המרכזיות בסטטיסטיקה נקראת **התפלגות נורמלית** והיא מופיעה בביולוגיה, בפיזיקה, ברפואה ובתחומי מדע נוספים.

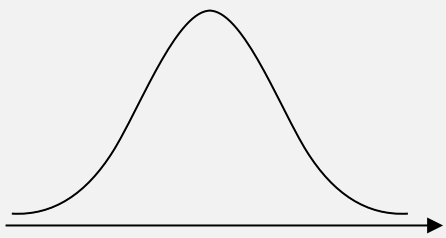


נדגים את הנושא בעזרת היסטוגרמה המציגה את התפלגות הגובה של גברים בוגרים בסנטימטרים.
ההיסטוגרמה מורכבת ממלבנים אפורים המייצגים את השכיחות היחסית של טווחי גובה שונים. מההיסטוגרמה עולה שטווח הגבהים 175-177.5 ס״מ הוא בעל השכיחות היחסית **הגבוהה** ביותר, וככל שנתרחק מטווח זה - מעלה או מטה - השכיחות היחסית פוחתת.



המלבנים המרכיבים את ההיסטוגרמה העליונה יוצרים ״מדרגות״. נציג כעת היסטוגרמה המתארת את אותם נתוני גובה, אך נקפיד על עמודות צרות יותר המייצגות טווחי גובה מצומצמים יותר.
בהיסטוגרמה משמאל המדרגות פחות מורגשות, ונוכל לצייר עקומה המתארת את ההתפלגות.
עקומה זו מייצגת את ההתפלגות הנורמלית של משתנה הגובה, והיא בצורת ״פעמון״ סימטרי.

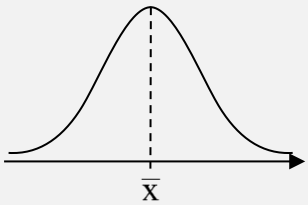
עקומת ההתפלגות הנורמלית



במעבר מההיסטוגרמה העליונה בעמוד לזו שמתחתיה, העמודות ייצגו טווח ערכים מצומצם יותר, ולכן היו צרות יותר ורבות יותר. צירופן זו לצד זו **הלך והתקרב** יותר לצורת עקומת ההתפלגות הנורמלית המופיעה משמאל.
אילו היינו מציגים היסטוגרמה שלישית ובה טווח הערכים שכל עמודה מייצגת היה מצומצם אף יותר, ההיסטוגרמה הייתה דומה יותר לעקומה חלקה בצורת פעמון.

מנקודה זו והלאה, נתייחס לעקומה זו כמייצגת את ההתפלגות הנורמלית ונכנה אותה **'עקומת ההתפלגות הנורמלית'**.
העקומה נקראת גם **פעמון גאוס** על שם יוהאן קרל פרידריך גאוס (1777-1855), מגדולי המתמטיקאים, שחקר את ההתפלגות הנורמלית.

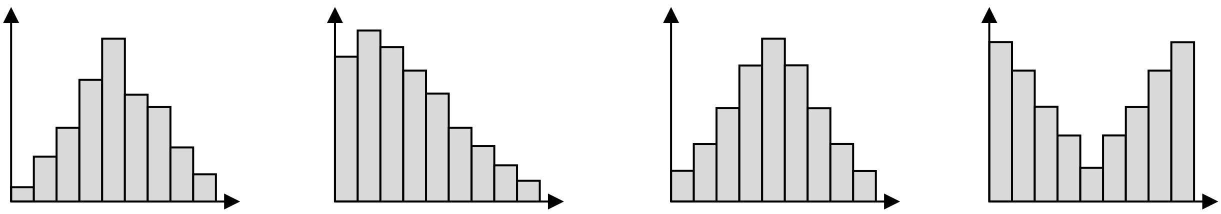
תכונות עקומת ההתפלגות הנורמלית



ההתפלגות הנורמלית היא **סימטרית**. אם נעביר קו אנכי במרכז ההתפלגות, צידה הימני יהווה תמונת מראה של צידה השמאלי.
ההתפלגות הנורמלית היא בעלת **שכיח** אחד (חד־שכיחית).
השכיח של ההתפלגות הוא גם **הממוצע** וגם ה**חציון** שלה.
ההתפלגות הנורמלית מתארת משתנים שונים בטבע וביניהם גובה ומשקל של בני אדם ובעלי חיים.
בעמוד הקודם עסקנו בהתפלגות הגובה של גברים. מצאנו שהגבהים השכיחים הם בקרבת הגובה הממוצע 176 ס״מ. ככל שהגובה מתרחק מהממוצע, מעלה או מטה, יש פחות גברים שזהו גובהם.

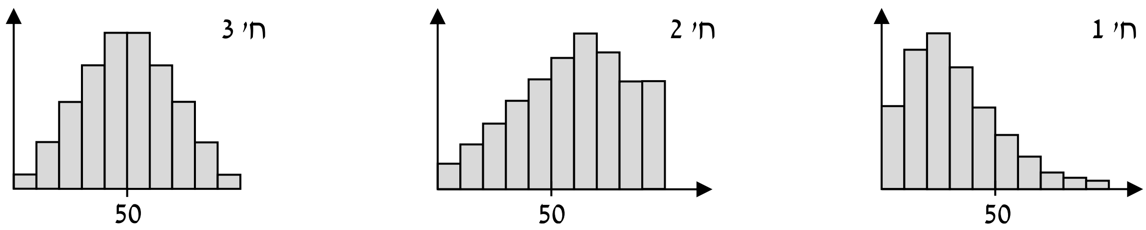
4. לפניכם ארבע היסטוגרמות:

I. II. III. IV.



א. אילו היסטוגרמות מתארות התפלגות חד־שכיחית?
ב. אילו היסטוגרמות מתארות התפלגות סימטרית?
ג. אילו שתי היסטוגרמות מייצגות התפלגות שהיא קרובה להתפלגות נורמלית?

5. מבחן מתמטיקה זהה הועבר ב־3 כיתות לימוד שונות.
לאחר בדיקת המבחנים המורה הכינה 3 היסטוגרמות המתארות את התפלגות הציונים בכל כיתה:

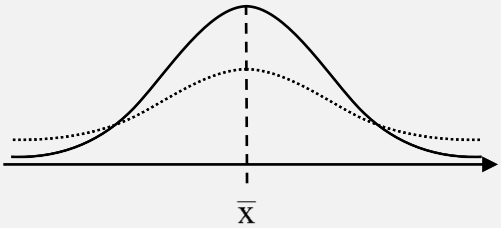


א. באיזו מהכיתות התפלגות הציונים הייתה קרובה להתפלגות נורמלית?
ב. נופר טענה: ״מההיסטוגרמה ניתן להסיק שבכיתה שלי המבחן נחשב כקל באופן יחסי.״
באיזו כיתה לדעתכם נופר לומדת?
ג. הוחלט להעניק 20 נקודות בונוס לכל תלמיד שציונו נמוך מ־50.
באיזו מהכיתות יש יותר תלמידים שיזכו בבונוס? הסבירו.

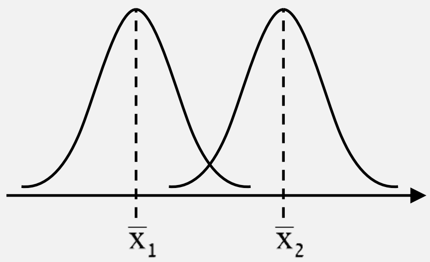
משפחת עקומות ההתפלגות הנורמלית

עקומות ההתפלגות הנורמלית הן משפחה של עקומות בעלות תכונות ייחודיות.
הצורה של כל אחת מהעקומות במשפחה זו נקבעת על ידי שני מדדים שפגשנו בכיתה י':
הראשון, **הממוצע** $\overline{x}$ של ערכי המשתנה, שהוא **מרכז** ההתפלגות, והוא גם הערך השכיח והחציוני.
השני, **סטיית התקן** s המייצגת את **פיזור** ערכי המשתנה סביב הממוצע.
ככל שסטיית התקן s **קטנה** יותר, כך ערכי המשתנה **צפופים** יותר והעקומה **צרה** יותר.
ככל שסטיית התקן s **גדולה** יותר, כך ערכי המשתנה **מפוזרים** יותר והעקומה **רחבה** יותר.

בשרטוט משמאל מופיעות עקומות של שתי התפלגויות נורמליות. לשתי ההתפלגויות אותו ממוצע, אך סטיות התקן שלהן שונות - עקומת ההתפלגות המסומנת בקו מנוקד היא בעלת סטיית תקן **גדולה** יותר וניתן לראות שערכיה **מפוזרים יותר** סביב הממוצע ביחס לערכי ההתפלגות השנייה.



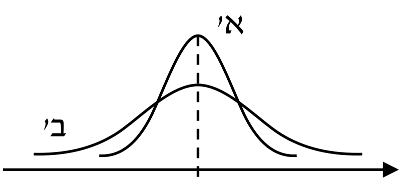
בשרטוט משמאל מופיעות עקומות של שתי התפלגויות נורמליות. לכל התפלגות ממוצע משלה.
לשתיהן יש אותה סטיית תקן, וניתן לראות שערכיהן מפוזרים באותה מידה סביב שני הממוצעים השונים.



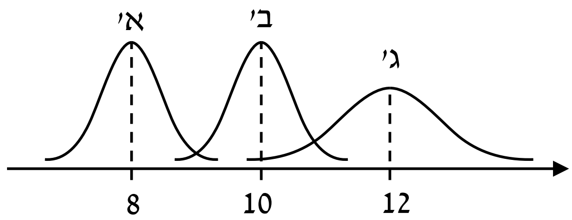
לסיכום, לכל התפלגות נורמלית יש שילוב **משלה** של ממוצע וסטיית תקן, ובכך היא נבדלת מהתפלגויות נורמליות אחרות.

6. לפניכם עקומות התפלגות נורמלית של ערכי משתנה א' ושל ערכי משתנה ב'.

השוו בין ערכי משתנה א' לבין ערכי משתנה ב' תוך התייחסות לממוצע ולסטיית התקן של כל משתנה.

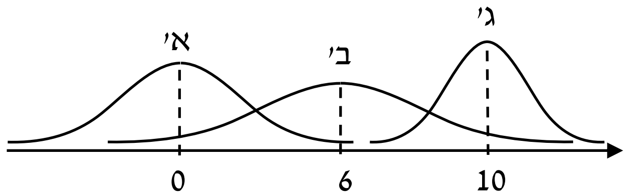


7. לפניכם עקומות של ההתפלגויות הנורמליות א', ב' ו-ג'.
היעזרו במראית עין וענו:
א. לאיזו התפלגות יש את הממוצע הקטן ביותר?
ב. באיזו התפלגות סטיית התקן היא הגדולה ביותר?



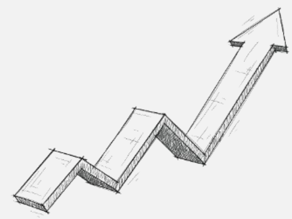
תזכורת! סטיית התקן S היא השורש הריבועי של השונות (Var). כלומר: $S = \sqrt{Var}$.
כאשר השונות **גדולה** יותר, גם סטיית התקן **גדולה** יותר.
כאשר השונות **קטנה** יותר, גם סטיית התקן **קטנה** יותר.

8. לפניכם עקומות של ההתפלגויות הנורמליות א', ב' ו-ג'.
היעזרו במראית עין וקבעו אילו מהטענות הן נכונות:
i. אם השונות של התפלגות א' היא 25,
אז ייתכן שהשונות של התפלגות ב' היא 36.
ii. אם השונות של התפלגות ג' היא 16, אז
ייתכן שסטיית התקן של התפלגות א' היא 6.
iii. השכיחות היחסית של הממוצע בהתפלגות א' נמוכה מהשכיחות היחסית של הממוצע בהתפלגות ב'.



היכן משתמשים בסטטיסטיקה?

סטטיסטיקה היא כלי משמעותי בתחומי מדע שונים ובחיי היום־יום.
בספורט, השימוש בסטטיסטיקה מאפשר מעקב אחרי ממוצע הזריקות והקליעות של שחקן בכדורסל, מדידת זמן החזקת כדור בידי קבוצת כדורגל, חישוב ממוצע זמני ריצה למרחקים שונים, וכך הלאה.

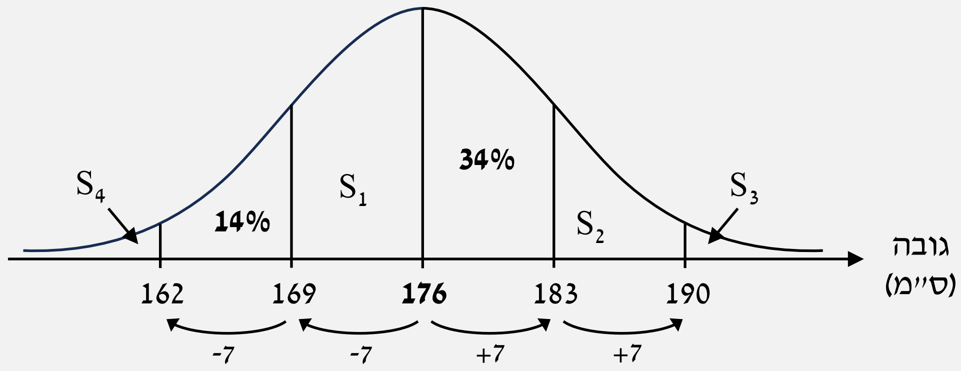


בכלכלה השימוש בסטטיסטיקה מאפשר ניתוח מעמיק של מצב המשק:
מעקב אחר מחירי הדירות במשך מספר חודשים רצופים כדי לבחון אם חל תהליך עלייה או תהליך ירידה במחירים; זיהוי תהליכי עלייה וירידה של השכר במשק; זיהוי חודשים בשנה שבהם הציבור נוטה להוציא סכומי כסף גדולים יותר בקניות, וכך הלאה.

חישוב השכיחות היחסית של ערכים בעזרת עקומת ההתפלגות הנורמלית

העמודות בהיסטוגרמה מציגות את השכיחות היחסית של כל ערכי המשתנה. סכום השכיחויות היחסיות האלו הוא 1. לכן השטח הכולל שמתחת לעקומת התפלגות הנורמלית גם הוא 1.
בעזרת הסימטריות של עקומת ההתפלגות הנורמלית נוכל לחשב שטחים בשני צדדי העקומה.

נדגים זאת בעזרת עקומת ההתפלגות הנורמלית של הגובה של גברים בוגרים שעסקנו בה קודם.
הגובה הממוצע 176 ס״מ מופיע במרכז ההתפלגות, ומצדדיו סומנו גבהים נוספים במרווחים של 7 ס״מ זה מזה. חמישה אנכים מחלקים את השטח הכלוא מתחת לעקומה ל־6 שטחים.



האחוז המופיע בכל שטח מייצג את **החלק היחסי** שאותו שטח מהווה מהשטח הכללי. אחוז זה מייצג גם את **השכיחות היחסית** של הערכים המשתייכים לאותו טווח, מתוך כלל ערכי המשתנה:

- הגברים שגובהם בטווח 183-176 ס״מ מהווים 34% מכלל הגברים שגובהם נמדד.
- הגברים שגובהם בטווח 169-162 ס״מ מהווים 14% מכלל הגברים שגובהם נמדד.

כעת נמצא את האחוז שמהווים השטחים S_1, S_2, S_3 ו־S_4 מהשטח הכולל שמתחת לעקומה:

השטח S_1 מייצג את השכיחות היחסית של טווח הגבהים 176-169 ס״מ, שהוא סימטרי לטווח הגבהים 183-176 ס״מ: שני הטווחים נמצאים משני צידי הממוצע, ומייצגים מרווח של 7 ס״מ.

הטווחים סימטריים ולכן השכיחויות היחסיות שלהם שוות זו לזו. לסיכום: $S_1=0.34$.

השטח S_2 מייצג את השכיחות היחסית של טווח הגבהים 190-183 ס״מ, שהוא סימטרי לטווח הגבהים 169-162 ס״מ: שני הטווחים נמצאים באותו מרחק משני צידי הממוצע, ומייצגים מרווח של 7 ס״מ. הטווחים סימטריים ולכן השכיחויות היחסיות שלהם שוות זו לזו. לסיכום: $S_2=0.14$.

הממוצע 176 ס״מ חוצה את השטח שמתחת לעקומה ל־2 שטחים שווים שכל אחד מהם מהווה 50% מהשטח הכולל. לכן נקבל: $0.34+S_2+S_3=0.5$. כלומר: $0.34+0.14+S_3=0.5$.

נקבל ש: $S_3=0.02$. נשים לב שהשטחים S_3 ו־S_4 סימטריים ולכן מתקיים: $S_4=0.02$.

9. התבוננו בתרשים המופיע בהסבר הקודם.

א. מהו הגובה שמחצית מהגברים נמוכים ממנו?

ב. עבור כל טענה, קבעו אם היא נכונה או שגויה:

i. מהתרשים עולה שהגובה של 14% מהגברים הוא בטווח 183-190 ס״מ.

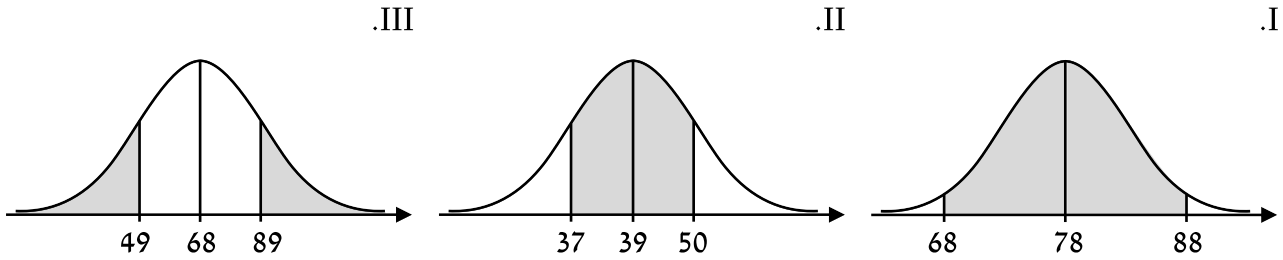
ii. מהתרשים עולה שהגובה של 2% מהגברים הוא גדול מ־190 ס״מ.

ג. רומי טענה: ״הגובה של 98% מהגברים הוא קטן מ־190 ס״מ.״ האם היא צודקת? הסבירו.

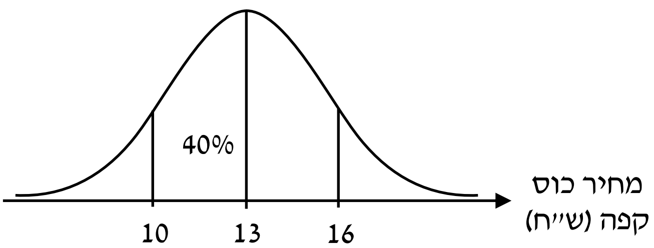
ד. שובל טענה: ״הגובה של 34% מהגברים הוא קטן מ־183 ס״מ.״ האם היא צודקת? הסבירו.

ה. חשבו את אחוז הגברים שגובהם בטווח 162-183 ס״מ.

10. בכל עקומה של התפלגות נורמלית מופיעים שני שטחים אפורים. היעזרו במספרים המופיעים על הציר, בדקו אם הטווחים סימטריים, וקבעו אם השטחים האפורים שווים זה לזה. הסבירו.



11. המחיר של כוס קפה מתפלג נורמלית.
המחיר הממוצע הוא 13 ש״ח.



א. האם לטווח המחירים 13-16 ש״ח ולטווח המחירים 10-13 ש״ח מתאימים שטחים שווים? הסבירו.

ב. היעזרו בשכיחות היחסית המופיעה בתרשים, וחשבו את השכיחות היחסית של הטווחים:

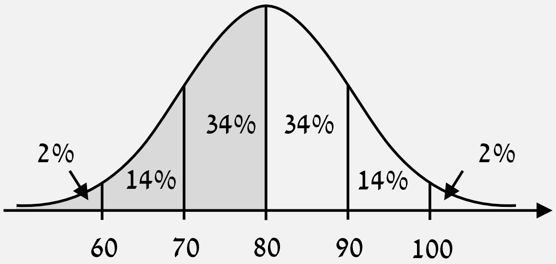
1. 13-16 ש״ח.
2. 10 ש״ח ומטה.
3. 16 ש״ח ומעלה.

ג. קסם טענה: ״ההסתברות לבחור באקראי כוס קפה שמחירה בטווח 10-13 ש״ח היא 0.5״. האם היא צודקת? הסבירו.

ד. מחיר כוס קפה בבית קפה א׳ הוא העשירון הראשון. מחיר כוס קפה בבית קפה ב׳ הוא העשירון השני. מחיר כוס קפה בבית קפה ג׳ הוא העשירון השלישי. האם הפער בשקלים בין המחירים בבתי הקפה א׳ ו־ב׳ שווה לפער בשקלים בין המחירים בבתי הקפה ב׳ ו־ג׳? הסבירו.

חישוב הסתברויות בעזרת עקומת ההתפלגות הנורמלית

כפי שלמדנו, האחוז המופיע בכל שטח מייצג את **השכיחות היחסית** של הערכים המשתייכים לאותו טווח מבין כלל ערכי המשתנה x. למעשה, אחוז זה גם מייצג את **ההסתברות** לבחור באקראי ערך השייך לטווח זה מבין כלל ערכי ההתפלגות. נדגים זאת בעזרת עקומת ההתפלגות הנורמלית

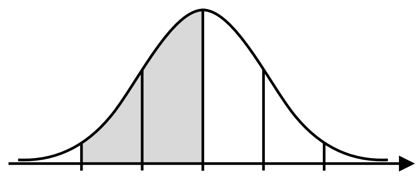


המופיעה משמאל, שבה הממוצע הוא 80. נציג מספר מסקנות שניתן להסיק לגבי הסתברויות:

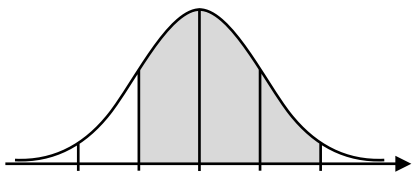
- בכל התפלגות נורמלית ההסתברות לבחור באקראי ערך קטן מהממוצע היא 0.5, מכיוון שהשטח שמשמאל לממוצע מהווה 50% מהשטח הכלוא מתחת לעקומה.
- נוכל להסיק שההסתברות לבחור באקראי ערך המשתייך לטווח 80-90 היא 0.34.
- נוכל להסיק גם שההסתברות לבחור באקראי ערך קטן מ־60 היא 0.02.

12. העקומות המופיעות בשאלה זו זהות לעקומה שהופיעה בהסבר הקודם. היעזרו בשכיחויות היחסיות שהופיעו בעקומה שהוצגה בהסבר, וחשבו את ההסתברות לבחור ערך המשתייך לטווח המסומן באפור:

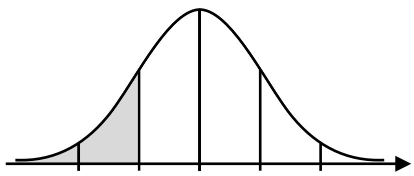
I.



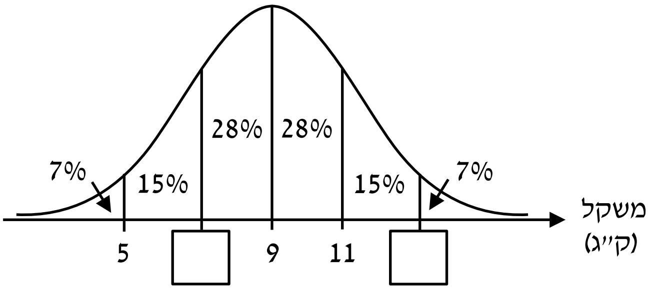
II.



III.



13. המשקל של אבטיחים מתפלג נורמלית.
ממוצע ההתפלגות הוא 9 ק"ג.



א. היעזרו בסימטריה של עקומת ההתפלגות הנורמלית, והשלימו את המשקלים החסרים.

ב. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה:

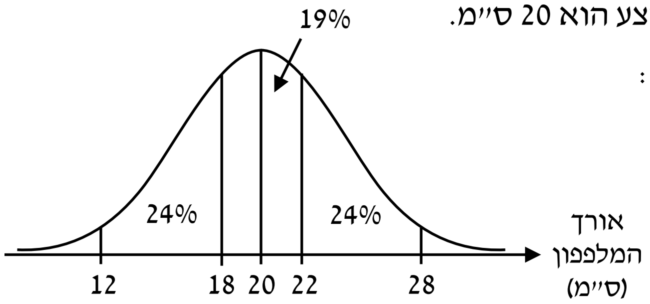
i. ההסתברות לבחור באקראי אבטיח שמשקלו נמוך מ־9 ק"ג מבין כל האבטיחים היא 0.5.

ii. ההסתברות לבחור באקראי אבטיח שמשקלו בטווח 9-13 ק"ג מבין כל האבטיחים היא 0.43.

ג. חשבו את ההסתברות לבחור באקראי מבין כל האבטיחים אבטיח שמשקלו:

1. גבוה מ־9 ק"ג. 2. בטווח 7-11 ק"ג. 3. בטווח 5-13 ק"ג.

14. האורך של מלפפונים מתפלג נורמלית. האורך הממוצע הוא 20 ס"מ.

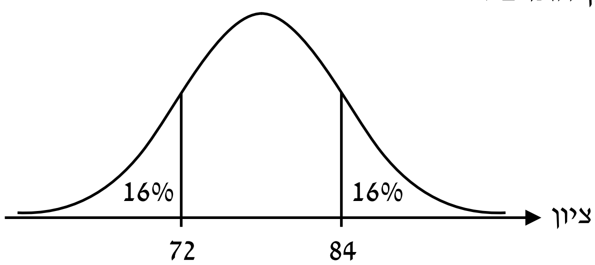


א. בוחרים באקראי מלפפון. חשבו את ההסתברות:
  1. שאורכו בטווח 20-18 ס"מ.
  2. שאורכו גדול מ־28 ס"מ.
  3. שאורכו גדול מ־22 ס"מ.

ב. לחנות נשלחו 1,500 מלפפונים.
היעזרו בסעיף א'3 וחשבו כמה מהמלפפונים צפויים להיות בעלי אורך גדול מ־22 ס"מ? הסבירו.

ג. גל מפרידה את כל המלפפונים שאורכם קטן מ־12 ס"מ. כמה מלפפונים היא צפויה להפריד? הסבירו.

15. לפניכם עקומת ההתפלגות הנורמלית של ציונים במבחן הארצי.



א. מה היה הציון הממוצע במבחן?

ב. בוחרים באקראי את אחד מטופסי המבחן שהוגשו. מהי ההסתברות שנבחר טופס שבו:
  1. הציון גדול מ־78?
  2. הציון בטווח 84-78?

ג. ידוע ש־1,680 תלמידים קיבלו ציון נמוך מ־84. כמה תלמידים השתתפו בבחינה?

ד. תלמידים שציוניהם גבוהים מ־96 נחשבים למצטיינים. תלמידים שציוניהם נמוכים מהציון x נחשבים נכשלים. ידוע שמספר הנכשלים שווה למספר המצטיינים. מצאו את x.

ה. הציון של נמרוד הוא העשירון החמישי. הציון של ינאי הוא העשירון השישי. הציון של זוהר הוא העשירון השביעי. האם הציונים של נמרוד ושל זוהר מרוחקים באותה מידה מהציון של ינאי? נמקו.

שינוי בערכי המשתנה והשפעתו על ההתפלגות

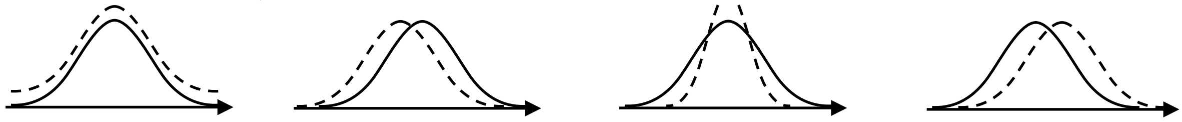
16. הציונים במבחן ארצי התפלגו נורמלית. הציון הממוצע הארצי היה 71, וסטיית התקן הייתה 8.
לאחר בדיקת המבחנים הוחלט להעניק לכל נבחן תוספת של 3 נקודות לציון.

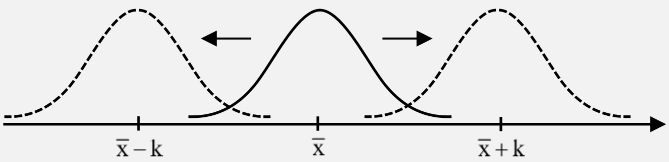
א. מה היה הציון הממוצע הארצי לאחר השינוי?

ב. מה הייתה סטיית התקן לאחר השינוי?

ג. לפניכם צמדים של עקומות התפלגות נורמלית.
העקומה המשורטטת בקו רציף היא ההתפלגות של הציונים המקוריים. הסתמכו על סעיפים א' ו־ב' וקבעו באיזה שרטוט מופיעה במקווקו עקומת ההתפלגות של הציונים **לאחר** תוספת הנקודות.

I. II. III. IV.





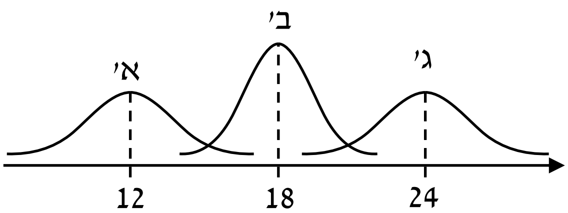
בשאלה הקודמת מצאנו שאם **נוסיף** מספר חיובי k **לכל הערכים** של משתנה המתפלג נורמלית, סטיית התקן **לא תשתנה**, ולכן עקומת ההתפלגות החדשה תהיה **זהה בצורתה** לעקומה המקורית, אך תמוקם **ימינה** יותר על ציר ה־x.
באותו אופן, נוכל להסיק שאם **נחסר** מספר חיובי k **מכל הערכים** של משתנה המתפלג נורמלית, עקומת ההתפלגות תהיה **זהה בצורתה** לעקומה המקורית, אך תמוקם **שמאלה** יותר על ציר ה־x.

לסיכום, אם **נוסיף** k חיובי לכל ערכי ההתפלגות, סטיית התקן **לא תשתנה**, והעקומה תזוז **ימינה**.
אם **נחסר** k חיובי מכל ערכי ההתפלגות, סטיית התקן **לא תשתנה**, והעקומה תזוז **שמאלה**.

17. משקל המזוודות שהועלו למטוס מתפלג נורמלית. המשקל הממוצע הוא 18 ק״ג וסטיית התקן היא 2 ק״ג. הוחלט להעניק לכל נוסע מתנה שמשקלה 3 ק״ג.
המתנות הוכנסו למזוודות, וכל מזוודה נשקלה שוב.

א. האם לאחר השקילה הנוספת, משקל המזוודות מתפלג נורמלית? הסבירו.
ב. מהו המשקל הממוצע של המזוודות בשקילה השנייה? הסבירו.
ג. מהי סטיית התקן של המזוודות בשקילה השנייה? הסבירו.
ד. ידוע שבשקילה השנייה היו 300 מזוודות שמשקלן היה גבוה מהמשקל השכיח.
האם ייתכן שהיו רק 250 מזוודות שמשקלן היה נמוך מהמשקל החציוני? הסבירו.

18. לפניכם עקומות של ההתפלגויות הנורמליות א׳, ב׳ וג׳.
היעזרו במראית עין וענו:



א. באיזו התפלגות הממוצע הוא הקטן ביותר?
ב. באיזו התפלגות סטיית התקן היא הקטנה ביותר?
ג. ידוע שהתפלגות א׳ מייצגת את העלות של כוס קפה בבתי קפה בעיר מסוימת בחודש שעבר.
כעת הוחלט שבכל בתי הקפה בעיר עלות כוס הקפה תגדל באותו מספר שקלים. איזו התפלגות - ב׳ או ג׳ - מתארת את התפלגות העלות של כוסות הקפה בעיר לאחר העלאת המחיר? הסבירו.

19. המשקל של אופנועים המיוצרים במפעל מתפלג נורמלית. המשקל הממוצע של אופנוע הוא 120 ק״ג.
המשקל של 34% מהאופנועים הוא בטווח 123-120 ק״ג.

א. כמה אחוזים מכלל האופנועים הם בעלי משקל בטווח 120-117 ק״ג?
ב. הוחלט להוסיף לכל אופנוע משענת שמשקלה 6 ק״ג.
לאחר ההוספה, כמה אחוזים מכלל האופנועים הם בעלי משקל שהוא בטווח 129-123 ק״ג?

20. במבצע התרמה השתתפו אלפי תורמים ותורמות. סכומי התרומה התפלגו נורמלית.
התרומה הממוצעת הייתה 20 ש"ח, וסטיית התקן הייתה 5 ש"ח.
הכיתה בדקה כיצד התרומות היו מתפלגות אם כל תרומה הייתה גדולה פי 3 מכפי שהייתה במציאות.

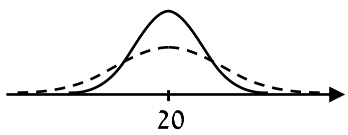
א. מה הייתה התרומה הממוצעת במקרה זה?

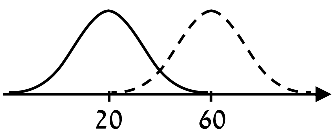
ב. מה הייתה סטיית התקן במקרה זה?

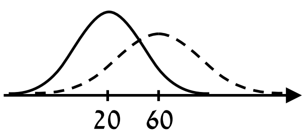
ג. אגם טענה: "הכפלת כל תרומה פי 3 מגדילה את הממוצע ואת סטיית התקן, ובמקרה זה הממוצע **ינוע ימינה** והעקומה **תימתח אופקית ותהיה רחבה יותר**". האם היא צודקת? הסבירו.

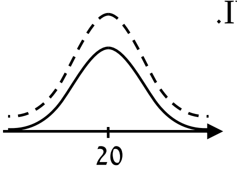
ד. גפן טען: "השטח הכלוא מתחת לעקומה תמיד יהיה 1. כאשר העקומה נמתחה אופקית, היא **תתכווץ אנכית כלפי מטה**, כך שהשטח יהיה 1 ולא יותר מ־1.". האם הוא צודק? הסבירו.

ה. לפניכם צמדים של עקומות התפלגות נורמלית.
העקומה המשורטטת בקו רציף היא התפלגות התרומות המקוריות. הסתמכו על הסעיפים א'־ד' וקבעו באיזה שרטוט מופיעה במקווקו עקומת ההתפלגות של התרומות **לאחר** הגדלת התרומות:

I.


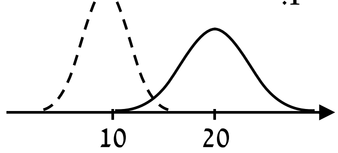
II.


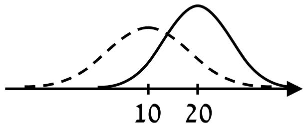
III.


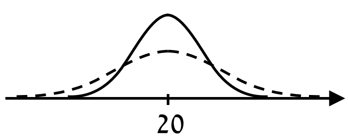
IV.


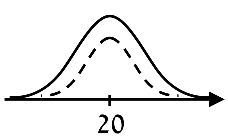
ו. סיגל בדקה כיצד התרומות היו מתפלגות אם כל תרומה הייתה **קטנה** פי 2.

1. מה הייתה התרומה הממוצעת במקרה זה?
2. מה הייתה סטיית התקן במקרה זה?
3. לפניכם צמדים של עקומות התפלגות נורמלית. העקומה המשורטטת בקו רציף היא התפלגות התרומות המקוריות. הסתמכו על הסעיפים הקודמים וקבעו באיזה שרטוט מופיעה במקווקו עקומת ההתפלגות של התרומות **לאחר** הקטנת התרומות:

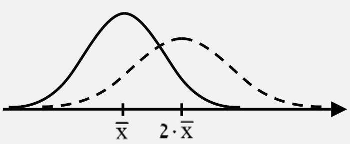
I.


II.


III.


IV.


בשאלה הקודמת מצאנו שאם נכפיל או נחלק במספר קבוע את **כל** ערכיו של משתנה המתפלג נורמלית, סטיית התקן תשתנה ובהתאם גם גובה העקומה ישתנה. זאת, כדי שהשטח הכלוא מתחת לעקומה יישאר 1.

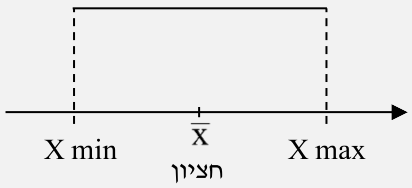


אם נכפיל פי $k > 1$ סטיית התקן תיגדל, העקומה תימתח אופקית ותתכווץ אנכית (תהיה נמוכה יותר).
אם נחלק פי $k > 1$ סטיית התקן תיקטן, העקומה תתכווץ אופקית ותימתח אנכית (תהיה גבוהה יותר).

מהי התפלגות א־סימטרית?

בתחילת הפרק עסקנו בהיסטוגרמה המייצגת את גובהם של גברים, והראינו שככל שהעמודות היו צרות יותר, כך צורת ההיסטוגרמה הלכה והתקרבה לצורת עקומת ההתפלגות הנורמלית.
למעשה, ההתפלגות הנורמלית היא רק אחת מהתפלגויות רבות. לאחר שראינו כיצד צירוף עמודות בהיסטוגרמה מקרב אותנו לעקומה נורמלית, נוכל לעסוק בשלוש התפלגויות אחרות, שגם אותן נציג בעזרת עקומות משלהן. בכל העקומות השטח הכלוא מתחת לעקומה שווה לסכום השכיחויות היחסיות של כל הערכים, ולכן הוא שווה ל־1.

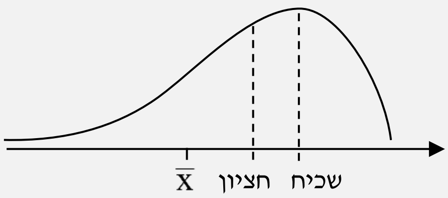
התפלגות אחידה



התפלגות זו מאפיינת משתנה שלכל ערכיו יש אותה שכיחות.
משמאל מופיעה עקומה של התפלגות אחידה.
ניתן לראות שהחל מהערך הנמוך ביותר, X min, ועד לערך הגבוה ביותר, X max, לכל הערכים יש אותה שכיחות.
בהתפלגות זו הממוצע שווה לחציון, וכל הערכים הם השכיח.

דוגמה: בבחינה ארצית 20 תלמידים קיבלו את הציון 60, 20 תלמידים קיבלו את הציון 61, וכך הלאה עד הציון 100. השכיחות של כל הציונים היא 20, ולכן התפלגות הציונים היא אחידה.

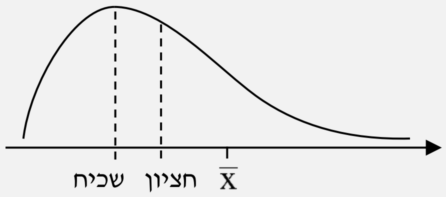
התפלגות א־סימטרית שלילית (שמאלית)



התפלגות זו מאפיינת משתנה שרוב ערכיו גבוהים מהממוצע.
משמאל מופיעה עקומה של התפלגות מסוג זה.
נהוג לומר שיש להתפלגות ״זנב משמאל״.
בתוך כך, השכיח גבוה מהחציון שגבוה מהממוצע.
שכיחות הערכים קטנה ככל שמתרחקים מהשכיח,
אך **מצד ימין** היא קטנה בקצב **מהיר יותר**.

לדוגמה, התפלגות הציונים בבחינת בגרות שבה מרבית הציונים גבוהים, תיוצג על ידי התפלגות כזו.

התפלגות א־סימטרית חיובית (ימנית)



התפלגות זו מאפיינת משתנה שרוב ערכיו נמוכים מהממוצע.
משמאל מופיעה עקומה של התפלגות מסוג זה.
נהוג לומר שיש להתפלגות ״זנב מימין״.
בתוך כך, השכיח קטן מהחציון שקטן מהממוצע.

שכיחות הערכים קטנה ככל שמתרחקים מהשכיח, אך **מצד שמאל** היא קטנה בקצב **מהיר יותר**.

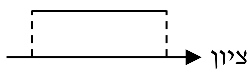
לדוגמה, התפלגות השכר במפעל שבו מרבית העובדים מקבלים שכר נמוך ומעט מנהלים מקבלים שכר גבוה, תיוצג על ידי התפלגות כזו.

21. בבחינת הבגרות באנגלית מרבית הציונים היו גבוהים מהממוצע.

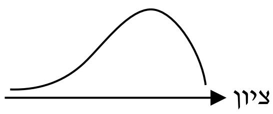
א. האם ייתכן שהתפלגות הציונים היא נורמלית? הסבירו.

ב. קבעו איזו מהעקומות שלפניכם מתארת את התפלגות הציונים:

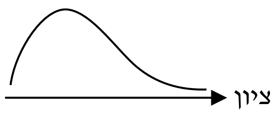
I.



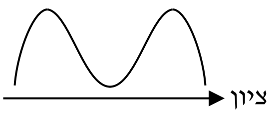
II.



III.



IV.



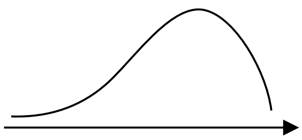
ג. התאימו בין כל תיאור של משתנה לבין ההתפלגות המתאימה לו מבין ההתפלגויות I, II, III ו־IV:

1. התפלגות המשקל של החיות בשמורה, כאשר מרבית החיות שוקלות פחות מהממוצע.

2. התפלגות שעות השינה של אנשים בגילים שונים, כאשר בכל הגילים משך השינה הוא 7 שעות.

3. התפלגות האורך של סרטי קולנוע כאשר מרבית הסרטים ארוכים מהממוצע.

22. לפניכם תרשים של התפלגות.



א. מהו שמה של התפלגות זו?

ב. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה **ביחס להתפלגות זו**:

i. הממוצע גדול מהשכיח.

ii. העקומה היא סימטרית.

iii. האנך המייצג את החציון מחלק את השטח הכלוא מתחת לעקומה לשני שטחים שווים.

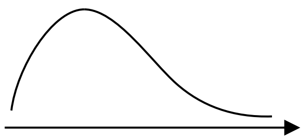
iv. יתכנו שני ערכים שהשכיחויות שלהם שוות זו לזו.

ג. הציעו תיאור מציאותי **משלכם** להתפלגות שהתרשים מתאים לה.

ד. המספרים a_2 , a_3 ו־ a_4 מייצגים את העשירונים השני, השלישי והרביעי בהתאמה.

האם ההפרש בין a_2 ו־ a_3 שווה להפרש בין a_3 ו־a_4? הסבירו.

23. לפניכם תרשים של התפלגות.



א. מהו שמה של התפלגות זו?

ב. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה **ביחס להתפלגות זו**:

i. העקומה אינה סימטרית.

ii. אם הממוצע הוא 67, ייתכן שהחציון הוא 87.

iii. האנך המייצג את החציון מחלק את השטח הכלוא מתחת לעקומה לשני שטחים השווים ל־0.5.

iv. אם החציון הוא 80 אז השכיחות של החציון גדולה מהשכיחות של הערך 90.

ג. הציעו תיאור מציאותי **משלכם** להתפלגות שהתרשים מתאים לה.

תשובות:

1) א. המשתנה הוא המשקל; סוג המשתנה הוא כמותי רציף.

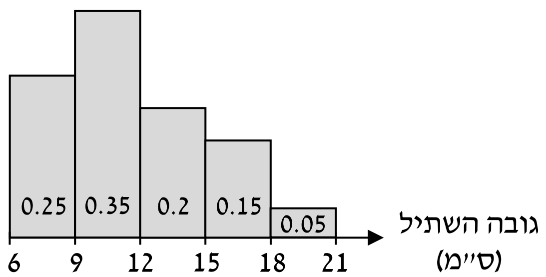
ב.

x - המשקל (ק״ג)	$14<x\le 17$	$11<x\le 14$	$8<x\le 11$	$5<x\le 8$	$2<x\le 5$
f - מספר השועלים	5	7	2	2	4
שכיחות יחסית באחוזים	25%	35%	10%	10%	20%

ג. II. **ד.** ייתכן. העמודה הימנית מייצגת את כל השועלים שמשקליהם בטווח 17-14 ק״ג אך אין הכרח שהמשקל של אחד מהם הוא 16 ק״ג. **ה. 1.** המלבן השני מימין. **2.** המלבן הימני. **3.** המלבן השני משמאל.

2) א. לא ניתן. ההיסטוגרמה מציגה את החלק **היחסי** של קבוצה זו מתוך כלל האוכלוסייה, אך מבלי לדעת את גודל האוכלוסייה, לא ניתן לחשב את גודל הקבוצה המדוברת. **ב.** כן. מההיסטוגרמה ניתן לראות שהמבקרים בגילי 7-3 מהווים 10% מהאוכלוסייה, והמבקרים בגילי 15-11 מהווים 15% מהאוכלוסייה. לכן ניתן לקבוע שמספר המבקרים בגילי 7-3 הוא אכן נמוך יותר. **ג. 1.** במלבן השני משמאל. **2.** במלבן השני משמאל. **3.** במלבן השלישי מימין. **ד. 1.** 200 מטופלים. **2.** 20 מטופלים.

3) א. משמאל.



ב.

x - גובה השתיל (ס״מ)	$18<x\le 21$	$15<x\le 18$	$12<x\le 15$	$9<x\le 12$	$6<x\le 9$
שכיחות יחסית באחוזים	5%	15%	20%	35%	25%

ג. 1. במלבן השני משמאל. **2.** במלבן השמאלי. **3.** במלבן השני משמאל. **ד. 1.** 240 שתילים.

2.

x - גובה השתיל (ס״מ)	$18<x\le 21$	$15<x\le 18$	$12<x\le 15$	$9<x\le 12$	$6<x\le 9$
f - מספר השתילים	12	36	48	84	60

4) א. II, III ו־IV. **ב.** I ו־II. **ג.** II ו־IV.

5) א. ח׳ 3. **ב.** ח׳ 2. **ג.** ח׳ 1.

6) למשתנים א׳ ו־ב׳ יש אותו ממוצע. סטיית התקן של משתנה ב׳ גדולה יותר מסטיית התקן של משתנה א׳.

7) א. התפלגות א׳. **ב.** התפלגות ג׳.

8) i. נכונה. **ii.** נכונה. **iii.** שגויה.

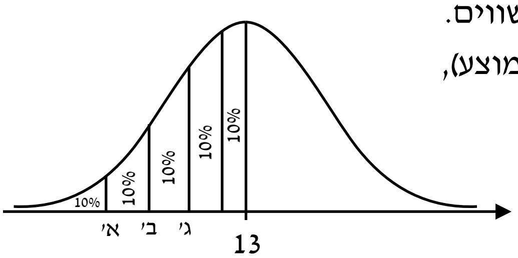
9) א. 176 ס״מ. **ב. i.** נכונה. **ii.** נכונה. **ג.** רומי צודקת. **ד.** שובל טועה. הגובה של 84% מהגברים הוא קטן מ־183 ס״מ. **ה.** 82%.

10) עקומה I: הטווחים סימטריים ולכן השטחים האפורים שווים זה לזה.

עקומות II ו־III: הטווחים אינם סימטריים ולכן השטחים האפורים אינם שווים זה לזה.

11) א. כן. **ב. 1.** 40%. **2.** 10%. **3.** 10%. **ג.** קסם טועה. ההסתברות היא 0.4. האחוז המופיע בכל שטח מייצג את **השכיחות היחסית** של הערכים המשתייכים לאותו טווח מתוך כלל ערכי המשתנה x, ולכן מייצג גם את **ההסתברות** לבחור באקראי ערך השייך לטווח זה מבין כלל ערכי ההתפלגות.

ד. הפער שונה. העשירונים מחלקים את ההתפלגות ל־10 שטחים שווים. המשמעות היא שככל שהעשירון קרוב יותר לשכיח (שהוא גם הממוצע), השטח הכלוא גבוה יותר ולכן צר יותר. לכן, ככל שמתרחקים מהשכיח לכל צד, המרחק בין שני עשירונים סמוכים הולך וגדל.



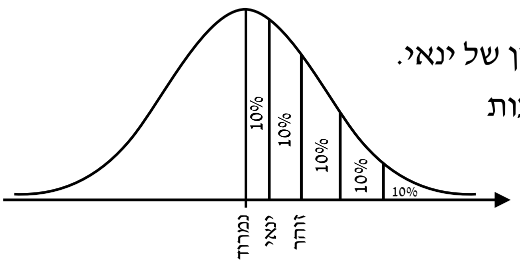
12) עקומה I: 0.48 ; **עקומה II:** 0.82 ; **עקומה III:** 0.16.

13) א. בריבוע הימני 13 ; בריבוע השמאלי 7. **ב. i.** נכונה. **ii.** נכונה. **ג. 1.** 0.5. **2.** 0.56. **3.** 0.86.

14) א. 1. 0.19. **2.** 0.07. **3.** 0.31. **ב.** 465 מלפפונים. **ג.** 105 מלפפונים.

15) א. 78. **ב. 1.** 0.5. **2.** 0.34. **ג.** 2,000 תלמידים. **ד.** x = 60.

ה. הציונים של נמרוד ושל זוהר נמצאים במרחקים שונים מהציון של ינאי. העשירונים מחלקים את ההתפלגות ל־10 שטחים שווים. המשמעות היא שככל שהעשירון קרוב יותר לשכיח (שהוא גם הממוצע), השטח הכלוא גבוה יותר ולכן צר יותר. לכן, ככל שמתרחקים מהשכיח לכל צד, המרחק בין שני עשירונים סמוכים הולך וגדל.



16) א. 74. **ב.** 8. **ג.** I.

17) א. כן. הוספת מספר קבוע לכל ערכי ההתפלגות תזיז אותה באופן אחיד ימינה על ציר המספרים ולא תשנה את היותה נורמלית. **ב.** 21 ק״ג. **ג.** 2 ק״ג. **ד.** לא ייתכן. בהתפלגות נורמלית השכיח והחציון נמצאים במרכז ההתפלגות, ולכן מחצית מהערכים מעליהם ומחצית מהערכים מתחתם. אם יש 300 מזוודות שמשקלן גבוה מהשכיח, אז יש גם 300 מזוודות שמשקלן נמוך מהשכיח, שהוא גם החציון.

18) א. התפלגות א׳. **ב.** התפלגות ב׳. **ג.** התפלגות ג׳.

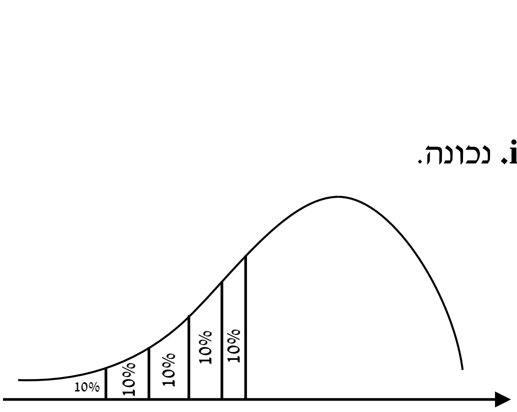
19) א. 34%. **ב.** 68%.

20) א. 60 ש״ח. **ב.** 15 ש״ח. **ג.** אגם צודקת. הגדלה של סטיית התקן תגדיל את הפיזור ולכן תביא למתיחה אופקית. בנוסף, מכיוון שהממוצע גדל, תתבצע גם הזזה ימינה. **ד.** גפן צודק. **ה.** III. **ו. 1.** 10 ש״ח. **2.** 2.5 ש״ח. **3.** I.

21) א. לא ייתכן. **ב.** II. **ג. 1.** III. **2.** I. **3.** II.

22) א. א־סימטרית שלילית. **ב. i.** שגויה. **ii.** שגויה. **iii.** נכונה. **iv.** נכונה.

ד. ההפרש שונה. העשירונים מחלקים את ההתפלגות ל־10 שטחים שווים. המשמעות היא שככל שהעשירון קרוב יותר לשכיח, השטח הכלוא גבוה יותר ולכן צר יותר. לכן, ככל שמתרחקים מהשכיח לכל אחד מהצדדים, המרחק בין שני עשירונים סמוכים הולך וגדל.



23) א. א־סימטרית חיובית. **ב. i.** נכונה. **ii.** שגויה. **iii.** נכונה. **iv.** נכונה.

