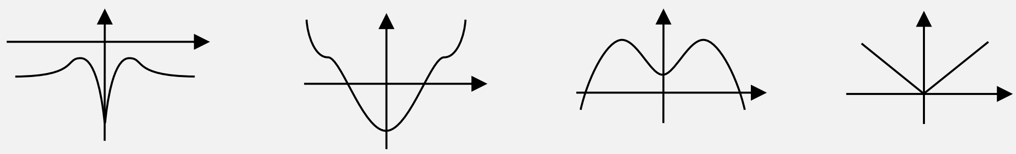
נושא 5 - חשבון דיפרנציאלי

קדם אנליזה

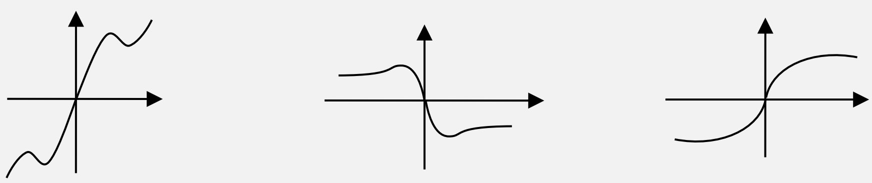
נפתח את הפרק עם תזכורות בנושאים שפגשנו בתחום הקדם אנליזה בכיתה י׳.

פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית

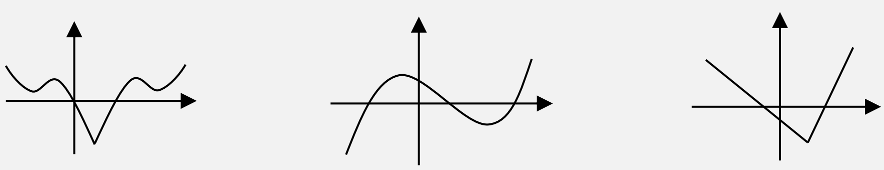
פונקציה זוגית היא פונקציה המקיימת: $f(-x)=f(x)$.
כלומר, ערך ה־y של הפונקציה עבור $(-x)$ כלשהו שווה לערך ה־y של הפונקציה עבור x.
המשמעות הגרפית של תכונה זו היא שגרף של פונקציה זוגית הוא סימטרי ביחס לציר ה־y.
דוגמאות:



פונקציה אי זוגית היא פונקציה המקיימת: $f(-x)=-f(x)$.
כלומר, אם בפונקציה זו עבור הצבת x מתקבל הערך y אז עבור הצבה של $(-x)$ מתקבל הערך $(-y)$.
המשמעות הגרפית של תכונה זו היא שגרף של פונקציה אי זוגית הוא סימטרי ביחס לראשית הצירים. דוגמאות:



קיימות גם **פונקציות שאינן זוגיות ואינן אי זוגיות**. הגרפים של הפונקציות האלו אינם סימטריים ביחס לציר ה־y ואינם סימטריים ביחס לראשית הצירים. דוגמאות:

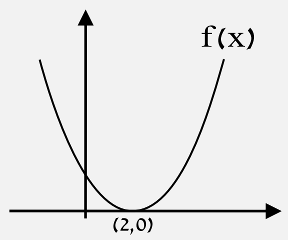


טרנספורמציות של פונקציה

טרנספורמציה היא שינוי המתבצע על הפונקציה.

שינוי זה משפיע על ערכי הפונקציה ועל הגרף שלה.
כעת נדגים מספר טרנספורמציות בסיסיות.

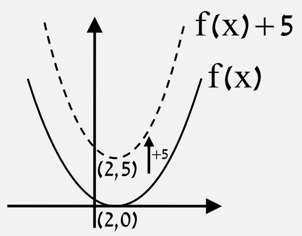
בהסבר ניעזר בפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ שהגרף שלה מופיע משמאל.



I. **הזזה אנכית של p יחידות:** $f(x)\to f(x)+p$

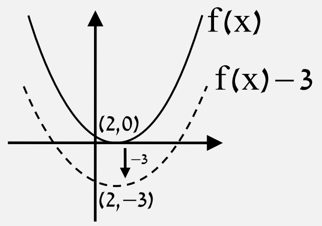
כאשר $0<p$ כל ערכי הפונקציה **גדלים** ב־p יחידות וגרף הפונקציה **״עולה״**.
לדוגמה, כאשר $p=5$, גרף הפונקציה עולה ב־5 יח׳ כמתואר בסקיצה:

לאחר ההזזה, מתקבלת הפונקציה החדשה: $g(x)=(x-2)^2+5$.



כאשר $p<0$ כל ערכי הפונקציה **קטנים** ב־p יחידות וגרף הפונקציה **״יורד״**.
לדוגמה, כאשר $p=-3$, גרף הפונקציה יורד ב־3 יח׳ כמתואר בסקיצה:

לאחר ההזזה, מתקבלת הפונקציה החדשה: $g(x)=(x-2)^2-3$.

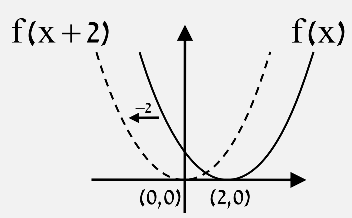


II. **הזזה אופקית של k יחידות:** $f(x)\to f(x+k)$

כתוצאה מהשינוי, ערכי הפונקציה שהתקבלו בעבר עבור x כלשהו יופיעו
כעת עבור $x-k$ וכתוצאה מכך גרף הפונקציה ״יזוז״ אופקית k יחידות.

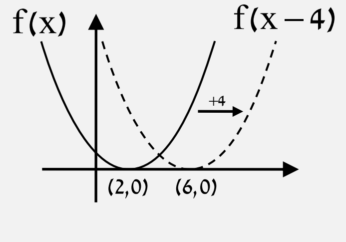
כאשר $0<k$ גרף הפונקציה ״יזוז שמאלה״. לדוגמה, כאשר $k=2$,
גרף הפונקציה יזוז שמאלה ב־2 יחידות כמתואר בסקיצה:

לאחר ההזזה, מתקבלת הפונקציה החדשה: $f(x+2)=g(x)=x^2$.



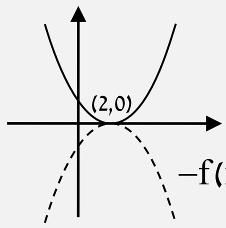
כאשר $k<0$ גרף הפונקציה ״יזוז ימינה״. לדוגמה, כאשר $k=-4$,
גרף הפונקציה יזוז ימינה ב־4 יחידות כמתואר בסקיצה:

לאחר ההזזה, מתקבלת הפונקציה החדשה: $f(x-4)=g(x)=(x-6)^2$.



נשים לב! ההזזה האופקית מתבצעת **בכיוון המנוגד** לסימן של הקבוע k.

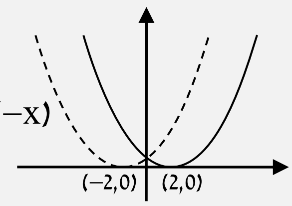
III. **שיקוף ביחס לציר ה־x:** $f(x) \to -f(x)$



כתוצאה מהשינוי, אם עבור ערך x כלשהו התקבל קודם הערך $f(x)$, כעת יתקבל עבור אותו ערך x המספר **הנגדי** $-f(x)$. אם נחליף כל שיעור y במספר הנגדי לו, נקבל שיקוף של הגרף המקורי **ביחס לציר ה־x** כמתואר בסקיצה.

לאחר השיקוף, מתקבלת הפונקציה החדשה: $g(x) = -(x-2)^2$.

IV. **שיקוף ביחס לציר ה־y:** $f(x) \to f(-x)$

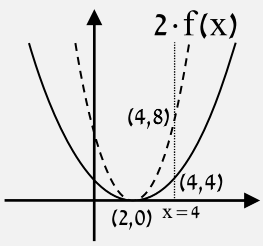


כתוצאה מהשינוי, ערכי הפונקציה שהתקבלו בעבר עבור x כלשהו יופיעו כעת עבור (x-) וכתוצאה מכך נקבל שיקוף של הגרף המקורי **ביחס לציר ה־y**, כמתואר בסקיצה.

לאחר השיקוף, מתקבלת הפונקציה החדשה: $g(x) = (-x-2)^2$.

V. **מתיחה או כיווץ אנכיים -** $f(x) \to t \cdot f(x)$

כאשר $1 < t$ כל ערכי הפונקציה גדלים **פי** t ואז גרף הפונקציה עולה או יורד, בהתאם למגמה המקורית, בקצב **מהיר יותר**.



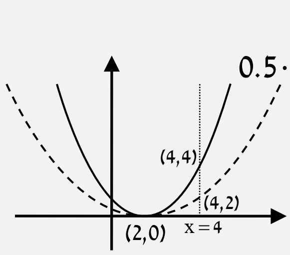
לדוגמה, כאשר $t = 2$, בנקודה $x = 4$ בה התקיים קודם: $f(4) = (4-2)^2 = 4$

נקבל כעת: $g(4) = 2(4-2)^2 = 2 \cdot (4) = 8$.

כתוצאה מהעלייה בקצב השינוי גרף הפונקציה **נמתח אנכית**, כמתואר בסקיצה.

לאחר ההכפלה, מתקבלת הפונקציה החדשה: $g(x) = 2 \cdot (x-2)^2$.

כאשר $0 < t < 1$ כל ערכי הפונקציה קטנים **פי** t ואז גרף הפונקציה עולה או יורד בהתאם למגמה המקורית, בקצב **איטי יותר**.



לדוגמה, כאשר $t = 0.5$, בנקודה $x = 4$ בה התקיים קודם:

$f(4) = (4-2)^2 = 4$ נקבל כעת: $g(4) = 0.5 \cdot (4-2)^2 = 0.5 \cdot (4) = 2$.

כתוצאה מהירידה בקצב השינוי גרף הפונקציה **מתכווץ אנכית**, כמתואר בסקיצה.

לאחר ההכפלה, מתקבלת הפונקציה החדשה: $g(x) = 0.5 \cdot (x-2)^2$.

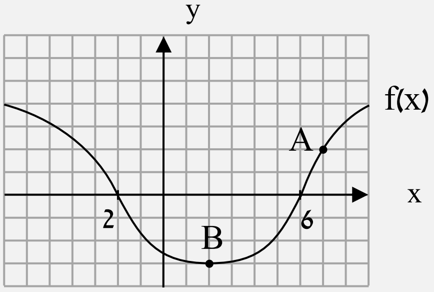
נשים לב! אם $t < -1$ תתבצע מתיחה אנכית **ובנוסף** שיקוף ביחס לציר ה־x.

אם $-1 < t < 0$ יתבצע כיווץ אנכי **ובנוסף** שיקוף ביחס לציר ה־x.

פונקציית הערך המוחלט

הערך המוחלט של מספר הוא המרחק שלו מנקודת האפס. כיוון שמרחק אינו יכול להיות שלילי, הרי ש**הערך המוחלט של כל מספר הוא חיובי** (מלבד 0 שערכו המוחלט הוא גם 0).

לדוגמה, עבור מספר חיובי מתקיים: $|4|=4$ ואילו עבור מספר שלילי מתקיים: $|-2|=2$.



נציג את הנושא בעזרת גרף הפונקציה $f(x)$ המופיע משמאל.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־x בשתי נקודות

ששיעורי ה־x שלהן: $x=-2$ ו־ $x=6$.

כעת נגדיר את הפונקציה: $g(x)=|f(x)|$.

בעזרת גרף הפונקציה $f(x)$ נשרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

בתחומים: $x<-2$ ו: $6<x$ הפונקציה $f(x)$ **חיובית** ולכן ערכי הפונקציה $g(x)=|f(x)|$ **לא משתנים**.

לדוגמה, בפונקציה $f(x)$ בנקודה A שבה $x=7$ מתקבל הערך החיובי $y=2$.

בהתאם, גם בפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=7$ מתקבל הערך המוחלט של $y=2$ ונקבל $y=2$.

באמצעות הצבה ישירה בפונקציה $g(x)$ ניתן לראות שאכן מתקיים: $g(7)=|f(7)|=|2|=2$.

בתחום: $-2<x<6$ הפונקציה $f(x)$ **שלילית** ולכן ערכי הפונקציה $g(x)=|f(x)|$ **הופכים לחיוביים**.

לדוגמה, בפונקציה $f(x)$ בנקודה B שבה $x=2$ מתקבל הערך השלילי $y=-3$.

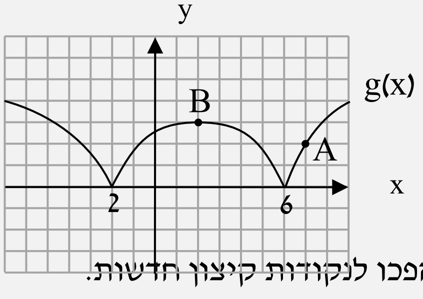
בהתאם, בפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=2$, נחשב את הערך המוחלט של $y=-3$ ונקבל $y=3$.

באמצעות הצבה ישירה בפונקציה $g(x)$ ניתן לראות שאכן מתקיים: $g(2)=|f(2)|=|-3|=3$.

מההסבר נוכל להסיק ש:

לכל x עבורו הפונקציה $f(x)$ **חיובית או שווה ל־0**, הפונקציה $g(x)=|f(x)|$ **אינה משתנה**.

לכל x עבורו הפונקציה $f(x)$ **שלילית**, הפונקציה $g(x)=|f(x)|$ תקבל ערך **חיובי** השווה לערך המוחלט של הפונקציה המקורית $f(x)$.



כעת נוכל לשרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=|f(x)|$:

ניתן לראות שבמעבר מגרף הפונקציה המקורית $f(x)$ לגרף פונקציית הערך המוחלט $g(x)=|f(x)|$, ״קיפלנו״ את החלק השלילי (שהיה מתחת לציר ה־x) כלפי מעלה (אל מעל לציר ה־x).

נקודות החיתוך המקוריות של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־x הפכו לנקודות קיצון חדשות.

פונקציית השורש הריבועי (אי־רציונאלית)

בכיתה י׳ עסקנו בפונקציות שורש ריבועי. בפונקציות אלו, המשתנה x מופיע בתוך השורש הריבועי.
בתוך כך עסקנו בפונקציות שבהן המשתנה x מופיע בחזקת 1 בתוך השורש.
דוגמאות: $f(x)=\sqrt{7-x}$, $g(x)=6-\sqrt{2x}$.

השנה נעמיק ונעסוק גם בפונקציות שבהן המשתנה x מופיע בחזקת 2 בתוך השורש.
דוגמאות: $f(x)=\sqrt{x^2-4}$, $g(x)=1+\sqrt{9-x^2}$.

בפרק זה נשלב חזרה על פונקציות מהסוג שעסקנו בהן בכיתה י׳, עם פונקציות מורכבות יותר.

קדם אנליזה

תחום ההגדרה של פונקציית שורש ריבועי

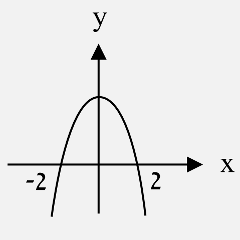
פונקציית שורש ריבועי מוגדרת רק כאשר הביטוי שבתוך השורש הוא אי שלילי (שווה ל־0 או חיובי).
כדי למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה, נבדוק מתי הביטוי **שבשורש** גדול או שווה לאפס.

דוגמה א׳: נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x+9}$.
הפונקציה מוגדרת כאשר $0\le x+9$. נפתור את אי השוויון ונקבל שתחום ההגדרה הוא: $-9\le x$.

דוגמה ב׳: נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

הפונקציה מוגדרת כאשר $0\le 4-x^2$. כדי למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ עלינו למצוא את פתרון את אי השוויון הריבועי $0\le 4-x^2$.

לשם כך נשרטט את הפונקציה הריבועית: $g(x)=4-x^2$.



המקדם של הביטוי x^2 הוא (-), ולכן הייצוג הגרפי הוא פרבולה בעלת נקודת מקסימום. הפרבולה חותכת את ציר ה־x כאשר $x=2$ ו־ $x=-2$.

משמאל מופיעה סקיצה של הפרבולה הזו. אנו מחפשים את התחום שבו הפרבולה $g(x)=4-x^2$ **חיובית** (מעל ציר ה־x) או **מתאפסת** (חותכת את ציר ה־x).
תחום זה הוא: $-2\le x\le 2$, ולכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $-2\le x\le 2$.

1. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

הביטוי שבתוך השורש הוא ליניארי

א. $f(x)=\sqrt{2x}$ ב. $f(x)=6-\sqrt{x}$ ג. $f(x)=\sqrt{x-3}$

ד. $f(x)=\sqrt{4x-8}$ ה. $f(x)=\sqrt{12-3x}$ ו. $f(x)=\sqrt{7-x}$

ז. $f(x)=\sqrt{15-5x}$ ח. $f(x)=4\sqrt{-x}$ ט. (*) $f(x)=\sqrt{7-x}+\sqrt{x-2}$

הביטוי שבתוך השורש הוא ריבועי

י. $f(x)=\sqrt{x^2-25}$ יא. $f(x)=\sqrt{x^2-16}$ יב. $f(x)=5+\sqrt{1-x^2}$

יג. $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$ יד. $f(x)=\sqrt{3x^2-12x}$ טו. $f(x)=\sqrt{x-2x^2}$

טז. $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$ יז. $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ יח. $f(x)=\sqrt{-x^2-10x-9}$

2. לפניכם צמדים של פונקציות. קבעו אם לשתיהן יש אותו תחום הגדרה. הסבירו את תשובתכם.

א. $f(x)=\sqrt{x-3}$, $g(x)=\sqrt{5x-15}$ ב. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, $g(x)=\sqrt{x-1}$

3. מצאו פונקציית שורש כלשהי שתחום ההגדרה שלה הוא:

א. $3\le x$ ב. $x\le 4$ ג. $0\le x\le 7$ ד. כל x ה. אף x ו. (*) $x=5$

נקודות החיתוך עם הצירים

דוגמה א׳: נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x+9}$ עם הצירים.

חיתוך עם ציר ה־y: נציב $x=0$ ונקבל: $f(0)=\sqrt{0+9}=\sqrt{9}=3$. מתקבלת הנקודה (0, 3).
יש להקפיד ולוודא ש־$x=0$ כלול בתחום ההגדרה.

חיתוך עם ציר ה־x: נשווה את הפונקציה ל־0: $\sqrt{x+9}=0 \rightarrow x+9=0 \rightarrow x=-9$.
מתקבלת הנקודה (‎-9 , 0).

דוגמה ב׳: נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ עם הצירים.

חיתוך עם ציר ה־y: נציב $x=0$ ונקבל: $f(0)=\sqrt{4-0^2}=\sqrt{4}=2$. מתקבלת הנקודה (0,2).

חיתוך עם ציר ה־x: נשווה את הפונקציה ל־0: $\sqrt{4-x^2}=0 \rightarrow 4-x^2=0 \rightarrow x=2,x=-2$.
מתקבלות הנקודות $(2,0)$, $(-2,0)$.

4. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים של הגרפים של הפונקציות הבאות:

הביטוי שבתוך השורש הוא ליניארי

א. $g(x)=\sqrt{x+36}$ ב. $h(x)=\sqrt{x-6}$ ג. $f(x)=6\sqrt{2x-10}$

ד. $k(x)=7\cdot\sqrt{8-4x}$ ה. $p(x)=x^2\cdot\sqrt{4-2x}$ ו. $t(x)=x\cdot\sqrt{x-7}$

הביטוי שבתוך השורש הוא ריבועי

ז. $h(x)=\sqrt{x^2-4}$ ח. $k(x)=2\cdot\sqrt{9-x^2}$ ט. $z(x)=\sqrt{x^2-7x}$

י. $f(x)=-5\cdot\sqrt{11x+x^2}$ יא. $p(x)=x\cdot\sqrt{49-x^2}$ יב. $t(x)=x^2\cdot\sqrt{x^2+9x}$

לעיתים, מציאת שיעורי נקודת החיתוך עם **ציר ה-x** כרוכה בפתרון **משוואה אי-רציונאלית**, שבה הנעלם x מופיע בתוך שורש ריבועי. נזכיר כיצד לפתור משוואה מסוג זה, בעזרת שתי הדוגמאות הבאות.

דוגמה א': נתונה הפונקציה: $f(x)=5-x+\sqrt{x+1}$. כדי למצוא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה-x עלינו לפתור את המשוואה: $5-x+\sqrt{x+1}=0$.

כדי לפתור משוואה אי-רציונאלית נקפיד על סדר הפעולות הבא:

1. **נבודד את השורש** לבדו באחד האגפים על ידי העברת אגפים ונקבל: $\sqrt{x+1}=x-5$.
2. **נעלה בריבוע** את שני האגפים כך שבאגף שמאל סימן השורש יתבטל.
   נקפיד להעלות בריבוע את **אגף ימין כולו כביטוי אחד** ולא כל גורם בנפרד.
   ניעזר בנוסחת הכפל המקוצר: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ונקבל: $x+1=x^2-10x+25$.
   לאחר סידור תתקבל המשוואה הריבועית: $x^2-11x+24=0$ שפתרונותיה: $x_1=3,\ x_2=8$.
3. **בדיקת שני הפתרונות** במשוואה **המקורית**:
   העלאת משוואה בריבוע עלולה להוסיף פתרון **שאינו פותר את המשוואה המקורית**. לכן יש להציב **במשוואה המקורית** את שני הפתרונות שקיבלנו, כדי לוודא שהפתרון מתאים:
   כשנציב 3 באגפי המשוואה המקורית, נקבל שגיאה: $4=0$. לכן הפתרון $x_1=3$ **לא מתאים**.
   כשנציב 8 באגפי המשוואה המקורית, נקבל שוויון: $0=0$. לכן הפתרון $x_2=8$ **מתאים**.
   לסיכום: פתרון המשוואה הוא $x=8$.

דוגמה ב': נתונה הפונקציה: $f(x)=x-\sqrt{x^2+2x}$. כדי למצוא את שיעורי נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה־x עלינו לפתור את המשוואה: $0=x-\sqrt{x^2+2x}$.

1. **נבודד את השורש** באחד האגפים ונקבל: $\sqrt{x^2+2x}=x$
2. **נעלה בריבוע** את שני האגפים ונקבל: $x^2+2x=x^2 \rightarrow 2x=0 \rightarrow x=0$
3. **בדיקת הפתרון** במשוואה **המקורית**: $0=0-\sqrt{0^2+2\cdot 0} \rightarrow 0=0$

קיבלנו שוויון: $0=0$ ולכן הפתרון $x=0$ **מתאים**.

לסיכום: פתרון המשוואה הוא $x=0$.

5. פתרו את המשוואות הבאות:

חשוב! לאחר פתרון המשוואה יש להציב במשוואה **המקורית** את ערכי ה־x שהתקבלו כדי לבדוק האם כל אחד מהפתרונות האלו, אכן מקיים אותה.

א. $\sqrt{x}=2$
ב. $\sqrt{x-4}=3$
ג. $\sqrt{x+5}=1$
ד. $\sqrt{-x+8}=\sqrt{2-x}$
ה. $\sqrt{x-2}=\sqrt{10-x}$
ו. $\sqrt{3x}=\sqrt{x-4}$
ז. $3+2\sqrt{x-5}=7$
ח. $4-3\sqrt{8-x}=-5$
ט. $4=2\sqrt{7x+2}-2$
י. $\sqrt{x}=x$
יא. $2\sqrt{x}=x$
יב. $\sqrt{x+2}=x$
יג. $\sqrt{x}=2-x$
יד. $\sqrt{x-3}=x-9$
טו. $\sqrt{x+5}=x-1$
טז. $\sqrt{3x^2+9}=2x$
יז. $x-4\sqrt{x}=0$
יח. $x+\sqrt{x-4}=10$
יט. $x\cdot\sqrt{4-x}-x=0$
כ. $3\sqrt{x+3}+x=7$
כא. $3\sqrt{x}+x-5=2\sqrt{x}+15$
כב. $2\sqrt{x}=\dfrac{x+4}{\sqrt{x}}$
כג. $\sqrt{x+1}=\dfrac{x}{2\sqrt{x+1}}$
כד. (*) $\sqrt{2-x}-\dfrac{x+1}{2\sqrt{2-x}}=0$
כה. (*) $\sqrt{x-5}=\dfrac{6}{\sqrt{x}}$
כו. (*) $\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}=4$
כז. (*) $2\sqrt{x-2}-\dfrac{x+2}{\sqrt{x-2}}=0$

6. מצאו פונקציית שורש ששיעורי נקודת החיתוך של הגרף שלה עם ציר ה־y הם:

א. $(0,0)$
ב. $(0,3)$
ג. $(0,-2)$
ד. $(0,-6)$

חיוביות ושליליות של פונקציית שורש ריבועי

כאשר ננסה למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של פונקציית שורש ריבועי, עלינו להתחשב בתחום ההגדרה של הפונקציה וגם בשיעורי נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה־x.

7. נתונה הפונקציה: $f(x)=x\cdot\sqrt{x^2-25}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־x.

ג. הציבו בפונקציה $f(x)$ את הערכים $x=7$ ו־$x=-6$ ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.

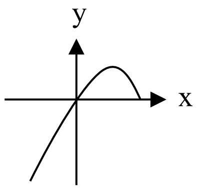
8. היעזרו בשאלה הקודמת ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(x-5)\cdot\sqrt{x}$ ב. $f(x)=x\cdot\sqrt{x^2-100}$ ג. $f(x)=x^2\cdot\sqrt{9-x^2}$

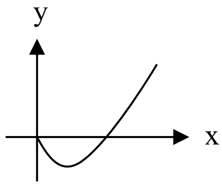
ד. $f(x)=(x^2-1)\cdot\sqrt{x}$ ה. (*) $f(x)=(x^2-1)\cdot\sqrt{2-x}$ ו. (*) $f(x)=(1-x^2)\cdot\sqrt{2x-x^2}$

9. בכל סעיף נתונות שלוש פונקציות וגרף של אחת מהן. היעזרו בתחומי ההגדרה ובתחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות, וקבעו לאיזו מהפונקציות מתאים הגרף:

א. $g(x)=x^2\cdot\sqrt{x-2}$ $h(x)=x\cdot\sqrt{2-x}$ $k(x)=x^2\cdot\sqrt{2-x}$



ב. $f(x)=x-\sqrt{x}$ $h(x)=1-\sqrt{x}$ $k(x)=-2+\sqrt{x}$

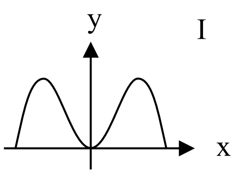


10. בכל סעיף נתונות שתי פונקציות ולצידן הגרפים שלהן.

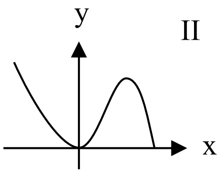
מצאו איזה גרף מתאים לכל אחת מהפונקציות. הסבירו את בחירתכם.

א. $f(x)=x^2\cdot\sqrt{9-x^2}$ $g(x)=x^2\cdot\sqrt{9-x}$

I

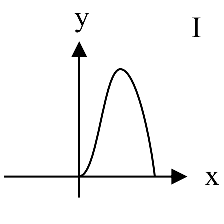


II

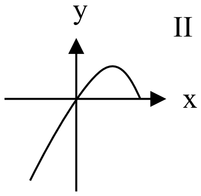


ב. $f(x)=x\cdot\sqrt{6-x}$ $g(x)=x^2\cdot\sqrt{6x-x^2}$

I



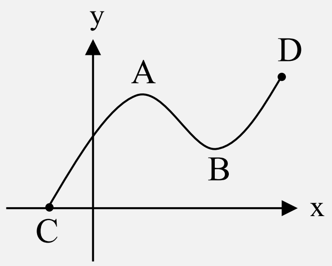
II



נקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה

תזכורת!

בפונקציות שורש עשויות להתקבל נקודות קיצון משני סוגים שונים:



- **נקודות קיצון פנימיות** המתקבלות כאשר הפונקציה עולה ואז יורדת, כמו הנקודה A בשרטוט, או יורדת ואז עולה, כמו הנקודה B בשרטוט. למדנו למצוא נקודות קיצון פנימיות על ידי השוואת נגזרת הפונקציה ל־0, ובדיקת סוג הקיצון.

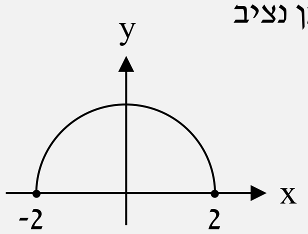
- **נקודות קיצון בקצה התחום** הן הנקודות ששיעור ה־x שלהם נמצא בקצות תחום ההגדרה של הפונקציה. בתוך כך, יש להן את שיעור ה־y הנמוך ביותר באותו חלק של גרף הפונקציה - כמו הנקודה C בשרטוט - או הגבוה ביותר באותו חלק של גרף הפונקציה - כמו הנקודה D בשרטוט.

דוגמה: נמצא את שיעורי נקודות הקיצון בקצה התחום של הפונקציה: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

בתחילת הפרק מצאנו את תחום ההגדרה של פונקציה זו, והוא: $-2 \le x \le 2$.

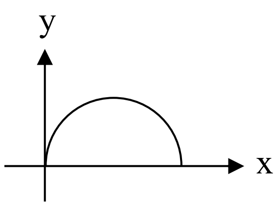
כעת נמצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה ולשם כך נתחיל במציאת נקודות האפס:

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \sqrt{4-x^2}=0 \;\rightarrow\; 4-x^2=0 \;\rightarrow\; x^2=4 \;\rightarrow\; x=\pm 2$$



מצאנו שהפונקציה מתאפסת אך ורק בנקודות קצה התחום שלה: (2 , 0) ו־(0 , 2-) ולכן הפונקציה בעלת סימן קבוע (+ או -) בכל תחום הגדרתה, פרט לקצוות. כדי לקבוע את הסימן נציב ערך כלשהו הנמצא בין נקודות האפס שמצאנו (לדוגמה $x=0$) ונראה שהפונקציה מקבלת ערך חיובי, כלומר הפונקציה חיובית בכל התחום שבין נקודות האפס שלה. ראינו שעבור $x=\pm 2$ הפונקציה $f(x)$ מתאפסת ובכל שאר התחום היא חיובית ולכן נקודות אלו על גרף הפונקציה הן בעלות שיעור ה־y הנמוך ביותר, כלומר אלה הן נקודות מינימום.

לסיכום, שיעורי נקודות הקיצון בקצה התחום של הפונקציה $f(x)$ הן: min(2 , 0) ו־min(-2 , 0).



11. לפניכם גרף הפונקציה: $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$. מצאו את:
    א. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
    ב. שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
    ג. שיעורי נקודות הקיצון בקצה התחום ואת סוגן.

12. נתונה הפונקציה: $f(x)=1-\sqrt{2x-x^2}$. מצאו את:

א. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים, אם יש כאלה.

ג. שיעורי נקודות הקיצון בקצה התחום ואת סוגן.

ד. נתון שלפונקציה יש נקודת קיצון פנימית אחת. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

13. לפניכם שלוש פונקציות:

$f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$ $\qquad g(x)=x^2+\sqrt{2-x^2}$ $\qquad h(x)=6+\sqrt{9-x^2}$

עבור כל פונקציה מצאו את:

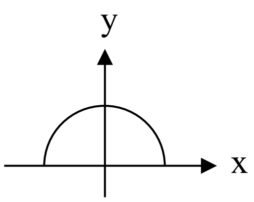
א. תחום ההגדרה.

ב. שיעורי נקודות הקיצון בקצה התחום ואת סוגן.

פונקציית שורש ריבועי - טרנספורמציות

בשאלות הבאות נעסוק בהזזה, בשיקוף, במתיחה ובכיווץ של גרף הפונקציה.
שימו לב! בהזזה אופקית תחום ההגדרה של הפונקציה משתנה בהתאם להזזה.
בהזזה אנכית ובמתיחה אנכית תחום ההגדרה של הפונקציה אינו משתנה.

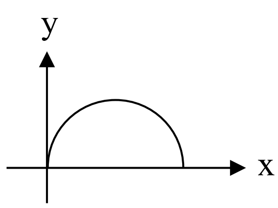
14. נתון גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.



היעזרו בגרף הנתון ושרטטו סקיצה של הפונקציה:

א. $k(x)=\sqrt{1-x^2}-6$ $\qquad$ ב. $g(x)=3\cdot\sqrt{1-x^2}$

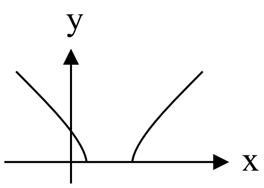
15. נתון גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$ שנקודת המקסימום שלו היא (3 , 9).



היעזרו בגרף הנתון ושרטטו סקיצה של הפונקציה:

א. $g(x)=-\sqrt{6x-x^2}$ $\qquad$ ב. $h(x)=\sqrt{6x-x^2}-9$

16. נתון גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$.



היעזרו בגרף הנתון ושרטטו סקיצה של הפונקציה:

א. $g(x)=f(x-1)$ $\qquad$ ב. $h(x)=f(x+4)$

פונקציית שורש ריבועי - חקירת פונקציה

17. בכל סעיף מופיעים נתונים לגבי הפונקציה $f(x)$. הסתמכו עליהם ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

א. נקודת המקסימום היחידה של הפונקציה היא $(9\,,5)$.
נקודות המינימום של הפונקציה בקצה התחום הן $(4\,,0)$ ו־$(14\,,0)$.
לפונקציה אין נקודות קיצון נוספות.

ב. נקודת המינימום היחידה של הפונקציה היא $(3\,,-3)$.
נקודות המקסימום של הפונקציה בקצה התחום הן $(0\,,0)$ ו־$(5\,,4)$.
לפונקציה אין נקודות קיצון נוספות.

ג. אחת משתי נקודות המקסימום של הפונקציה היא $(3\,,4)$.
נקודת המינימום הפנימית של הפונקציה נמצאת בראשית הצירים.
אחת מנקודות המינימום בקצה התחום של הפונקציה היא $(4\,,0)$.
הפונקציה זוגית.

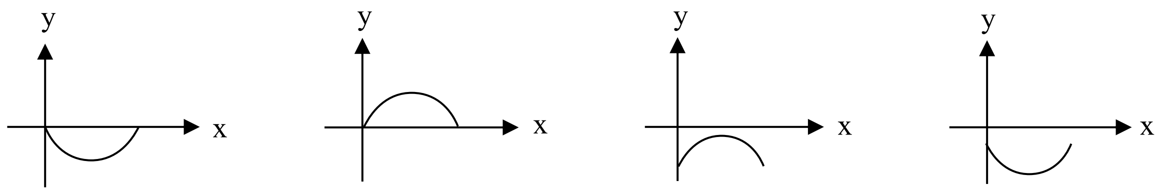
בשאלות הבאות נחקור פונקציות בעזרת הכלים שעסקנו בהם:
תחום ההגדרה, נקודות החיתוך עם הצירים ותחומי החיובית והשליליות.

18. נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x)=\sqrt{-x^2+10x}$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:
1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלה.
3. תחומי החיוביות והשליליות.
4. שיעורי נקודות הקיצון בקצה התחום ואת סוג הקיצון.

ב. אחד מהגרפים שלפניכם הוא גרף הפונקציה $f(x)$. קבעו מהו הגרף המתאים. הסבירו בחירתכם:

I.   II.   III.   IV.

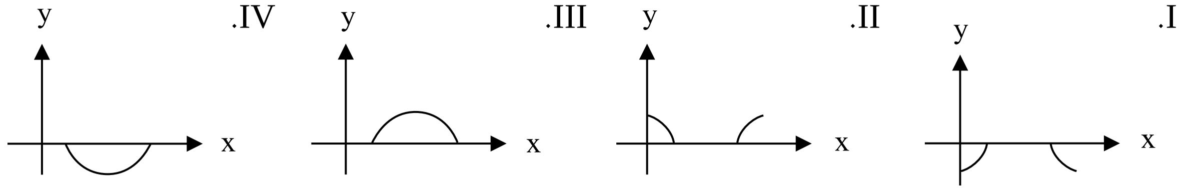


19. נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x)=\sqrt{-x^2+10x-16}$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה־x.
3. תחומי החיוביות והשליליות.
4. שיעורי נקודות הקיצון בקצה התחום׳ ואת סוג הקיצון.

ב. אחד מהגרפים שלפניכם הוא גרף הפונקציה $f(x)$. קבעו מהו הגרף המתאים. הסבירו בחירתכם:



תזכורת!

כדי להראות שפונקציה היא **זוגית** יש להראות ש: $f(-x)=f(x)$.

כדי להראות שפונקציה היא **אי זוגית** יש להראות ש: $f(-x)=-f(x)$.

פונקציה שאינה מקיימת את שני התנאים **אינה זוגית ואינה אי זוגית**.

20. עבור כל פונקציה קבעו אם היא זוגית, אי־זוגית או שאינה זוגית ואינה אי־זוגית:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ ג. $h(x)=\sqrt{2x}$

ד. $k(x)=\sqrt{9-x^2}$ ה. $t(x)=\sqrt{x^2}$ ו. $z(x)=x\cdot\sqrt{1-x^2}$

21. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

א. ספיר טענה שהפונקציה $f(x)$ היא אי־זוגית. האם היא צודקת? הסבירו.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. תחומי החיוביות והשליליות.
4. שיעורי נקודות הקיצון בקצה התחום, ואת סוג הקיצון.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום מוחלט? הסבירו.

ה. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום מוחלט? הסבירו.

ו. הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודות A ו־B.

האם ציר ה־y חוצה את הקטע AB? הסבירו.

22. נתונה הפונקציה $f(x)=4x\cdot\sqrt{x-x^2}$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. תחומי החיוביות והשליליות.
4. שיעורי נקודות הקיצון בקצות התחום, ואת סוג הקיצון.

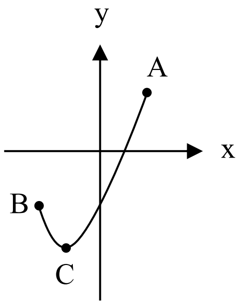
ב. נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון **פנימית** אחת כאשר $x=0.75$.
שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום מוחלט? הסבירו.

ד. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום מוחלט? הסבירו.

ה. נתון: למשוואה $f(x)=1$ יש שני פתרונות.
קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0.5$, מבלי לפתור אותה אלגברית. הסבירו.

23. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x-\sqrt{2-x^2}$ ועליו מסומנות נקודות הקיצון A, B ו־C.



א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. שיעורי נקודות הקיצון A ו־B בקצה התחום, ואת סוגן.
4. תחומי החיוביות והשליליות.

ב. נתון ששיעור ה־x של נקודת המינימום C הוא 1-. מצאו את שיעור ה־y של הנקודה C.

ג. נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x+1)$.

1. שרטטו סקיצה של הפונקציה $g(x)$.
2. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.

שאלות עם פרמטר

24. בכל סעיף היעזרו בנתון ומצאו את הפרמטר:

א. הפונקציה $t(x)=x\cdot\sqrt{x+n}$ עוברת בנקודה $(7\,,28)$.

ב. הפונקציה $f(x)=\sqrt{x-a}$ מוגדרת רק בתחום: $6\le x$.

ג. הפונקציה $z(x)=k-\sqrt{x^2+1}$ חותכת את ציר ה־y בנקודה $(0\,,8)$.

ד. הפונקציה $h(x)=\sqrt{x^2-mx}$ חותכת את ציר ה־x בנקודה $(2\,,0)$.

ה. הפונקציה $g(x)=\sqrt{b^2-x^2}$ מוגדרת רק בתחום $-5\le x\le 5$.

25. גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-5x+a}$ חותך את ציר ה־y בנקודה $(0\,,2)$.

א. מצאו את a.

ב. הציבו $a=4$, ועבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.
2. תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה, אם יש כאלה.
3. שיעורי נקודות הקיצון בקצות התחום, ואת סוגן.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $h(x)=2+f(x)$.

1. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
2. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ וקבעו את סוגן.

26. נתונה הפונקציה $f(x)=(x-a)\cdot\sqrt{x}$, $(0<a)$.

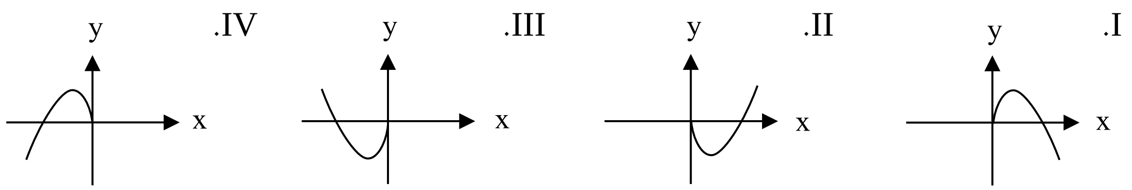
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הביעו באמצעות a, במידת הצורך, את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. נתון שהמרחק בין שתי הנקודות שמצאתם הוא 3 יח׳. מצאו את a.

ד. הציבו $a=3$, ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ה. אחד מהגרפים שלפניכם הוא גרף הפונקציה $f(x)$. קבעו מהו הגרף המתאים. הסבירו בחירתכם.



שאלה מסכמת בחקירת פונקציית שורש ריבועי - קדם אנליזה

27. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2\cdot\sqrt{a-2x}$ שתחום ההגדרה שלה הוא: $x\le 10$.

א. מצאו את a.

ב. הציבו $a=20$, ועבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
2. תחומי החיוביות והשליליות.

ג. נתון ששיעור ה־x של נקודת המקסימום הפנימית היחידה של הפונקציה הוא 8. מצאו את:

1. שיעור ה־y של נקודת קיצון זו.
2. שיעורי נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה ואת סוג הקיצון.
3. תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x)=14$. הסבירו בעזרת הסקיצה של גרף הפונקציה.

ו. מצאו עבור אילו ערכי k יהיו לישר $y=k$ שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה.

ז. נתונה הפונקציה: $g(x)=f(x+m)$. נתון שנקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ היא על ציר ה־y.

1. מצאו את m, ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
2. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ח. נתונה הפונקציה: $h(x)=2f(x)+4$.

1. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
2. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, ואת סוגן.

תשובות:

1) א. $0\le x$. **ב.** $0\le x$. **ג.** $3\le x$. **ד.** $2\le x$. **ה.** $x\le 4$. **ו.** $x\le 7$. **ז.** $x\le 3$. **ח.** $x\le 0$.
ט. $2\le x\le 7$. **י.** $5\le x$ או $x\le -5$. **יא.** $4\le x$ או $x\le -4$. **יב.** $-1\le x\le 1$. **יג.** $4\le x$ או $x\le 0$.
יד. $4\le x$ או $x\le 0$. **טו.** $0\le x\le 0.5$. **טז.** $5\le x$ או $x\le 2$. **יז.** $3\le x$ או $x\le 1$. **יח.** $-9\le x\le -1$.
2) א. אותו תחום. **ב.** תחום שונה.

3) תשובות אפשריות: **א.** $f(x)=\sqrt{2x-6}$, $g(x)=\sqrt{x-3}$. **ב.** $f(x)=\sqrt{8-2x}$, $g(x)=\sqrt{4-x}$.

ג. $f(x)=\sqrt{x(7-x)}$, $g(x)=\sqrt{x(14-2x)}$. **ד.** $f(x)=\sqrt{x^2+3}$, $g(x)=\sqrt{x^2+4}$.

ה. $f(x)=\sqrt{-x^2-3}$, $g(x)=\sqrt{-x^2-4}$. **ו.** $g(x)=\sqrt{-(x-5)^2}$.

4) א. (-36 , 0), (0 , 6). **ב.** (6 , 0). **ג.** (5 , 0). **ד.** (2 , 0), $(0\,,\,14\sqrt{2})$. **ה.** (0 , 0), (2 , 0). **ו.** (7 , 0).
ז. (2 , 0), (-2 , 0). **ח.** (3 , 0), (-3 , 0), (0 , 6). **ט.** (0 , 0), (7 , 0). **י.** (0 , 0), (-11 , 0). **יא.** (7 , 0), (-7 , 0), (0 , 0).
יב. (-9 , 0), (0 , 0).

5) א. $x=4$. **ב.** $x=13$. **ג.** $x=-4$. **ד.** אין פתרון. **ה.** $x=6$. **ו.** אין פתרון. **ז.** $x=9$. **ח.** $x=-1$.
ט. $x=1$. **י.** $x=0,1$. **יא.** $x=0,4$. **יב.** $x=2$. **יג.** $x=1$. **יד.** $x=12$. **טו.** $x=4$. **טז.** $x=3$.
יז. $x=0,16$. **יח.** $x=8$. **יט.** $x=0,3$. **כ.** $x=1$. **כא.** $x=16$. **כב.** $x=4$. **כג.** אין פתרון.
כד. $x=1$. **כה.** $x=9$. **כו.** $x=-2$. **כז.** $x=6$.

6) תשובות אפשריות: **א.** $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x^2}$. **ב.** $f(x)=\sqrt{9-x}$, $g(x)=3+\sqrt{x}$.
ג. $f(x)=-\sqrt{4-x}$, $g(x)=-2+\sqrt{x}$. **ד.** $f(x)=-\sqrt{36+x}$, $g(x)=-6+\sqrt{x}$.

7) א. $5\le x$ או $x\le -5$. **ב.** $(5,0)$, $(-5,0)$. **ג.** חיוביות: $5<x$; שליליות: $x<-5$.

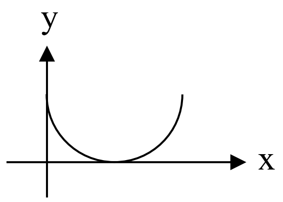
8) א. חיוביות: $5<x$; שליליות: $0<x<5$. **ב.** חיוביות: $10<x$; שליליות: $x<-10$.
ג. חיוביות: $0<x<3$ או $-3<x<0$; שליליות: אף x. **ד.** חיוביות: $1<x$; שליליות: $0<x<1$.
ה. חיוביות: $1<x<2$ או $x<-1$; שליליות: $-1<x<1$.
ו. חיוביות: $0<x<1$; שליליות: $1<x<2$.

9) א. הגרף הנתון מתאים לפונקציה $h(x)$. הפונקציה $k(x)$ נפסלת כי בתחום $x<0$ היא חיובית, בניגוד לשרטוט. הפונקציה $g(x)$ נפסלת כי תחום ההגדרה שלה $2\le x$ אינו מתאים לשרטוט. **ב.** הגרף הנתון מתאים לפונקציה $f(x)$ כי מבין השלוש, רק היא חותכת את ציר ה־x בשתי נקודות, כמו בשרטוט.

10) א. גרף I מתאים לפונקציה $f(x)$ וגרף II מתאים לפונקציה $g(x)$. הפונקציה $g(x)$ מתאפסת בשתי נקודות בלבד ולכן אינה מתאימה לגרף I. הפונקציה $f(x)$ מתאפסת בשלוש נקודות ולכן אינה מתאימה לגרף II. ניתן לפתור את השאלה גם על ידי בדיקת תחומי ההגדרה של הפונקציות. **ב.** גרף I מתאים לפונקציה $g(x)$, וגרף II מתאים לפונקציה $f(x)$. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x\le 6$ ולכן אינה מתאימה לגרף I. בפונקציה $g(x)$, ערך השורש תמיד אי־שלילי ולכן הפונקציה אי־שלילית ואינה מתאימה לגרף II. ניתן לפתור את השאלה גם על ידי בדיקת תחומי ההגדרה של הפונקציות.

11) א. $0\le x\le 5$. **ב.** (0 , 0), (5 , 0). **ג.** min(0 , 0), min(5 , 0).

12) א. $0\le x\le 2$. **ב.** (1 , 0), (0 , 1). **ג.** max(0 , 1), max(2 , 1). **ד.** השרטוט משמאל.

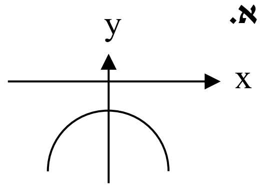


13) $f(x)$: **א.** $4 \le x$, $x \le 1$. **ב.** $min(4,0)$, $min(1,0)$.

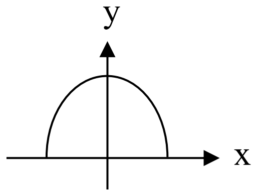
$g(x)$: **א.** $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$. **ב.** $min(\sqrt{2}, 2)$, $min(-\sqrt{2}, 2)$.

$h(x)$: **א.** $-3 \le x \le 3$. **ב.** $min(3,6)$, $min(-3,6)$.

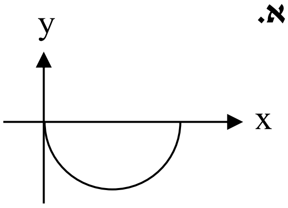
14) א.



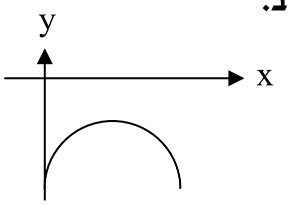
ב.



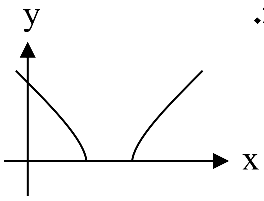
15) א.



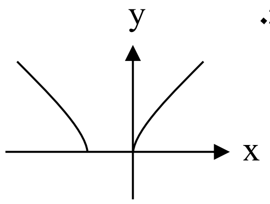
ב.



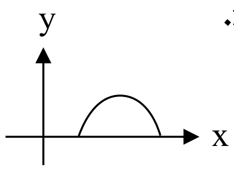
16) א.



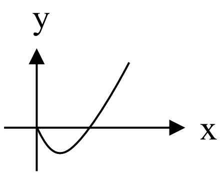
ב.



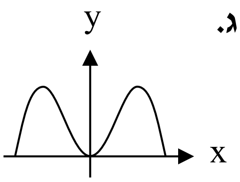
17) א.



ב.



ג.



18) א. 1. $0 \le x \le 10$. **2.** $(0,0)$, $(10,0)$. **3.** חיוביות: $0 < x < 10$; שליליות: אף x.

4. $min(10,0)$, $min(0,0)$. **ב.** גרף III. לפי סעיף א׳3 הפונקציה חיובית בכל תחום הגדרתה.

19) א. 1. $2 \le x \le 8$. **2.** $(8,0)$, $(2,0)$ **3.** חיוביות: $2 < x < 8$; שליליות: אף x. **4.** $min(8,0)$, $min(2,0)$.

ב. III.

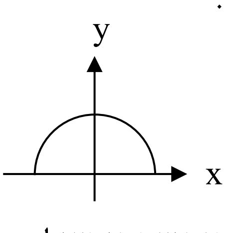
20) א. אינה זוגית ואינה אי־זוגית. **ב.** זוגית. **ג.** אינה זוגית ואינה אי־זוגית. **ד.** זוגית. **ה.** זוגית.

ו. אי־זוגית.

21) א. ספיר טועה. הפונקציה $f(x)$ היא זוגית מכיוון שמתקיים:

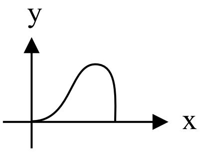
$f(x) = \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(-x)^2} = f(-x)$. **ב. 1.** $-5 \le x \le 5$. **2.** $(0,5)$, $(-5,0)$, $(5,0)$.

3. חיוביות: $-5 < x < 5$; שליליות: אף x. **4.** $min(-5,0)$, $min(5,0)$. **ג.** משמאל.



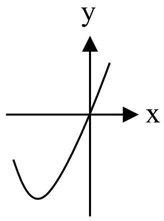
ד. כן. הנקודות $(-5,0)$, $(5,0)$ הן נקודות מינימום מוחלט שכן ערכי הפונקציה בנקודות אלו קטנים מכל ערכי הפונקציה בתחום ההגדרה שלה או שווים להם.

ה. כן. נקודת הקיצון הפנימית שלה היא נקודת מקסימום מוחלט, שכן ערך הפונקציה בנקודה זו גדול מכל ערכי הפונקציה בתחום ההגדרה שלה או שווה להם. **ו.** כן. הפונקציה $f(x)$ זוגית ומוגדרת אך ורק בתחום $-5 \le x \le 5$. לכן, לכל שתי נקודות על הגרף עם שיעור y זהה יש שיעורי x עם ערכים נגדיים כך שהמרחק שלהן מציר ה־y זהה.



22) א. 1. $0 \le x \le 1$. **2.** $(0,0)$, $(1,0)$. **3.** חיוביות: $0 < x < 1$; שליליות: אף x.

4. $\min(0,0)$, $\min(1,0)$. **ב.** השרטוט משמאל. **ג.** כן. שתי נקודות הקיצון מסוג קצה הן מינימום מוחלט. **ד.** כן, נקודת הקיצון הפנימית היא מקסימום מוחלט. **ה.** שני פתרונות.



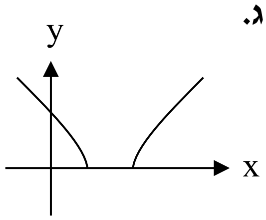
23) א. 1. $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$. **2.** $(1,0)$, $(0,-\sqrt{2})$. **3.** $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ שתיהן נקודות מקסימום. **4.** חיוביות: $1 < x \le \sqrt{2}$; שליליות: $-\sqrt{2} \le x < 1$.

ב. $y_C = -2$. **ג. 1.** משמאל. **2.** חיוביות: $0 < x \le 0.41$; שליליות: $-2.41 \le x < 0$.

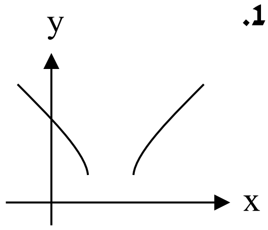
24) א. $n = 9$. **ב.** $a = 6$. **ג.** $k = 9$. **ד.** $m = 2$. **ה.** $b = \pm 5$.

25) א. $a = 4$. **ב. 1.** $(4,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$. **2.** חיוביות: $4 < x$ או $x < 1$; שליליות: אף x.

3. $\min(4,0)$, $\min(1,0)$. **ג.**



ד. 1.



2. $\min(4,2)$, $\min(1,2)$.

26) א. $0 \le x$. **ב.** $(0,0)$, $(a,0)$. **ג.** $a = 3$. **ד.** חיוביות: $3 < x$; שליליות: $0 < x < 3$. **ה.** גרף II. זהו הגרף היחיד המתאים לתחום ההגדרה שמצאנו בסעיף א׳ ולתחומי החיוביות והשליליות שמצאנו בסעיף ד׳.

27) א. $a = 20$. **ב. 1.** $(0,0)$, $(10,0)$. **2.** חיוביות: $0 < x < 10$, $x < 0$; שליליות: אף x.

ג. 1. $y = 128$. **2.** $\min(10,0)$ בקצה התחום, $\min(0,0)$. **3.** עלייה: $0 < x < 8$; ירידה: $8 < x < 10$, $x < 0$. **ד.** השרטוט הימני למטה. **ה.** 3 פתרונות. **ו.** $k = 0$ או $k = 128$.

ז. 1. $m = 8$; השרטוט האמצעי למטה. **2.** עלייה: $-8 < x < 0$; ירידה: $0 < x < 2$ או $x < -8$.

ח. 1. השרטוט השמאלי למטה. **2.** פנימיות: $\max(8,260)$, $\min(0,4)$; קצה: $\min(10,4)$.