חוברת תרגול לעבודת הקיץ לתלמידים העולים לכיתה י״א - ברמת 5 יחידות לימוד

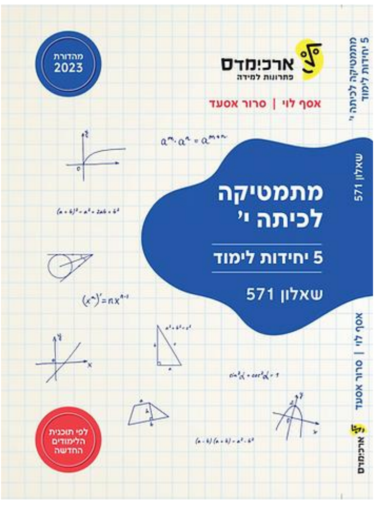
מצורפת חוברת תרגול לעבודת הקיץ עבור תלמידי/ות י׳ המיועדים/ות ללמוד **בכיתה י״א ברמת 5 יח׳ (571)**.

לאחר שיח מקיף ומעמיק עם צוותי הוראה, העבודה נכתבה לפי הקווים המנחים הבאים:

1. נושאים מרכזיים של כיתה י׳.
2. תרגול תכליתי ולא מעמיס מדי.

תוכן העניינים

השאלות בעבודה לקוחות **מספר התרגול של ארכימדס בשאלון 571 לכיתה י׳**. צוות התיכון יבחר נושאים **רלבנטיים לעבודה** לכל כיתה.



למידע על הספר: https://bit.ly/3B8bQQA.

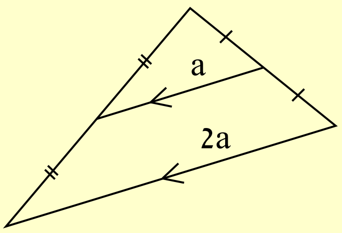
הזמנה מרוכזת בפנייה ל״יש הפצות״ באחת מהדרכים הבאות:

- בווטסאפ: 054-715-4122
- במייל yeshbooks@gmail.com
- באתר https://bit.ly/3FQfqBy

להזמנת **ספר הביתה עם שליח**: https://bit.ly/3WY8k7H .

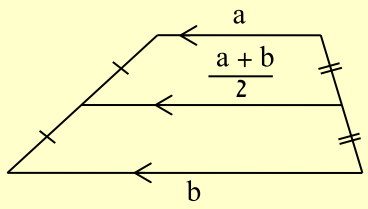
קטע אמצעים במשולש ובטרפז

קטע אמצעים במשולש הוא קטע המחבר בין אמצעי שתי צלעות במשולש.

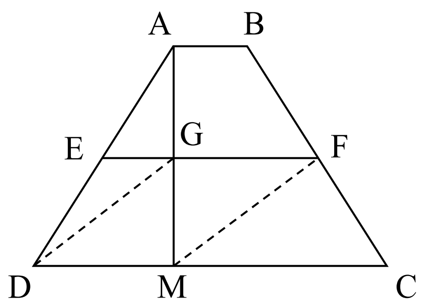


- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- קטע החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית.
- קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.

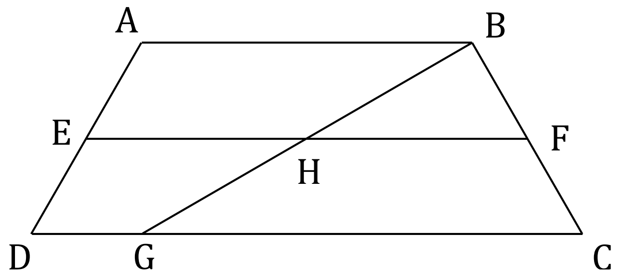
קטע האמצעים בטרפז מחבר את אמצעי שתי שוקי הטרפז.



- קטע האמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
- בטרפז, קטע החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים חוצה את השוק השנייה.



1. הנקודות E ו-F נמצאות על שוקי הטרפז ABCD כמתואר בשרטוט.
הקטע EF חותך את גובה הטרפז AM בנקודה G. נתון: $BF = CF$.
המרובע DMFG הוא מקבילית.
א. הוכיחו: $AE = DE$.
ב. נתון: המרובע ABGE הוא מקבילית.
הוכיחו: $CM = 3EG$.



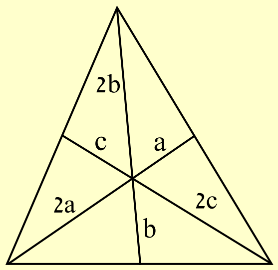
2. הקטע EF הוא קטע האמצעים בטרפז שווה השוקיים ABCD. הנקודה G נמצאת על הבסיס CD.
הקטע BG חוצה את הקטע EF בנקודה H.
נתון: $BG \perp BC$, $\sphericalangle BCD = 60^\circ$.
א. נסמן: $CF = a$.
הביעו באמצעות a את אורך EH.
ב. נתון: היקף הטרפז ABFE הוא 18 ס״מ. חשבו את היקף הטרפז CDEF.
(הדרכה: העבירו את הקטע EG).

תשובות: 2) א. 2a. **ב.** 22 ס״מ.

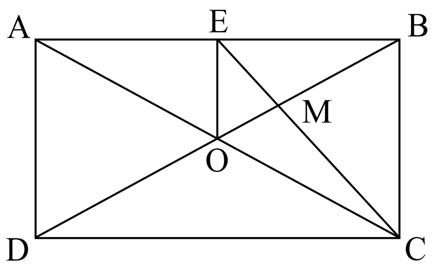
מפגש התיכונים במשולש

שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת הנקראת **"מפגש התיכונים במשולש"** וגם **"מרכז הכובד של המשולש"**.

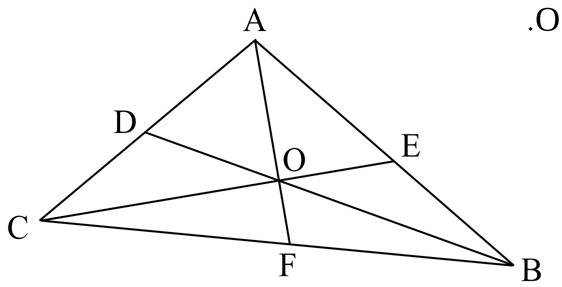
נקודת מפגש זו מחלקת כל תיכון ביחס של 2 :1 כך שהחלק הקרוב לקודקוד ארוך פי שניים מהחלק הרחוק מהקודקוד.



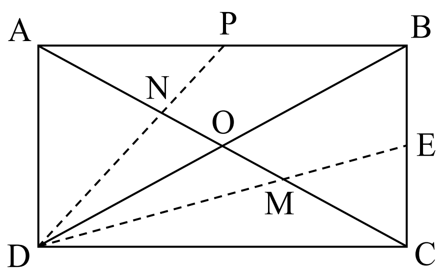
1. אלכסוני המלבן $ABCD$ נחתכים בנקודה O.
הקטע EO הוא גובה במשולש ΔABO.
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה M.
א. הוכיחו: $CM = 2EM$.
ב. נתון: $BC = 18$ ס"מ. שטח המשולש ΔABO הוא 108 סמ"ר.
חשבו את אורך הקטע MO.



2. במשולש ΔABC התיכונים AF, BD ו-CE נחתכים בנקודה O.
המשולש ΔADO הוא שווה צלעות. הוכיחו:
א. התיכונים AF ו-CE מאונכים זה לזה.
ב. $BO = 4OF$.



3. (*) במלבן $ABCD$ הנקודות E ו-P הן אמצעי הצלעות BC ו-AB בהתאמה. הקטעים DP ו-DE חותכים את האלכסון AC בנקודות N ו-M בהתאמה.
א. הוכיחו: $AN = MN = MC$.
ב. נתון: $MN = 20$ ס"מ. חשבו את אורך הקטע PE.
ג. נתון: $CE = 18$ ס"מ. חשבו את היקף המלבן.



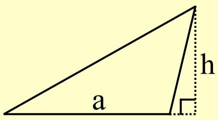
תשובות: 1) ב. 5 ס"מ. **3) ב.** 30 ס"מ. **ג.** 168 ס"מ.

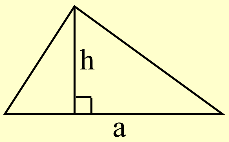
שטחים

משולשים

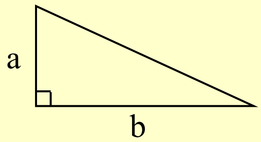
שטח משולש שווה למחצית מכפלת הגובה באורך הצלע

שאליה הוא יורד : $S=\frac{a\cdot h}{2}$.



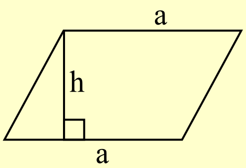


שטח **משולש ישר זווית** שווה למחצית מכפלת אורכי ניצביו : $S=\frac{a\cdot b}{2}$.



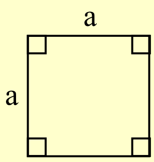
מרובעים

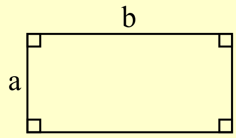
שטח מקבילית שווה למכפלת צלעה בגובה היורד אליה מהקודקוד שמולה : $S=a\cdot h$.



שטח מלבן שווה למכפלת אורכו ברוחבו : $S=a\cdot b$.

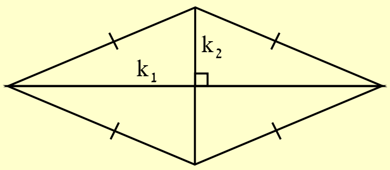
שטח ריבוע שווה לריבוע צלעו : $S=a^2$

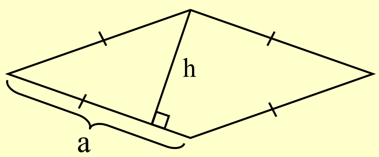




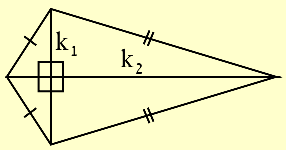
שטח מעוין ניתן לחישוב בשתי דרכים :

על ידי מכפלת הצלע בגובה היורד אליה : $S=a\cdot h$ **או** כמחצית מכפלת אורכי האלכסונים : $S=\frac{k_1\cdot k_2}{2}$.

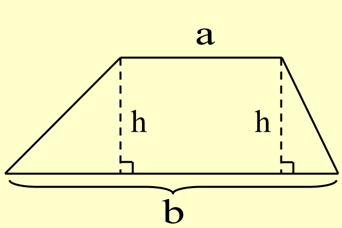




שטח דלתון שווה למחצית מכפלת האלכסונים : $S=\frac{k_1\cdot k_2}{2}$.

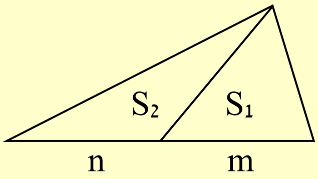


שטח טרפז שווה למחצית מכפלת הגובה בסכום הבסיסים : $S=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$.



משפט עזר בשטחים

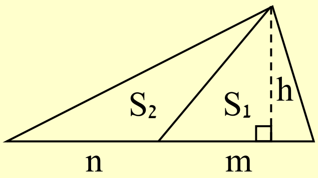
קטע המחבר בין קודקוד המשולש לבין הצלע שמולו, מחלק את המשולש לשני משולשים שהיחס בין שטחיהם הוא כיחס החלוקה של הצלע המחולקת.



בשרטוט: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{m}{n}$.

שימו לב! זהו משפט עזר אך הוא אינו כלול ברשימת המשפטים המאושרים על ידי משרד החינוך ולכן **לא ניתן להציגו במסגרת הוכחה בלימודים בחטיבה ובתיכון**. יש להוכיח אותו **בכל פעם** שמשתמשים בו.

עם זאת, הוא חשוב מאוד ושאלות רבות נפתרות באמצעותו.

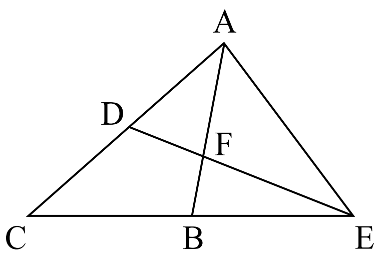


כדי להוכיח את משפט העזר נוריד גובה משותף h לשני המשולשים (במקווקו).

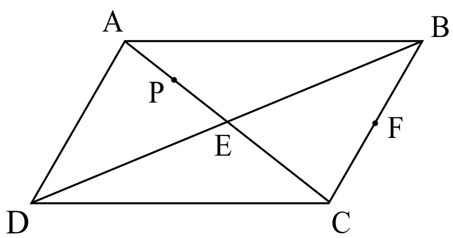
עבור המשולש הימני זהו גובה פנימי, ועבור המשולש השמאלי הוא גובה חיצוני.

שטח המשולש הימני הוא: $S_1=\frac{m\cdot h}{2}$ ושטח המשולש השמאלי: $S_2=\frac{n\cdot h}{2}$.

נחלק את שני השטחים זה בזה ונמצא את היחס ביניהם: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{m\cdot\cancel{h}}{\cancel{2}}\Big/\frac{n\cdot\cancel{h}}{\cancel{2}}=\frac{m}{n}$.



1. במשולש ΔACE התיכונים AB ו-DE נחתכים בנקודה F.
נתון: שטח המשולש ΔBEF הוא 12 סמ"ר. חשבו את שטח:
א. המשולש ΔAFE.
ב. המשולש ΔADF.
ג. המרובע CDFB.



2. (*) במקבילית ABCD, הנקודות P ו-F הן אמצעי הקטעים AE ו-BC בהתאמה. נסמן: $S_{\Delta CDE}=4k$.
א. הביעו באמצעות k את שטחי המשולשים:
1. ΔBCE 2. ΔCDF 3. ΔCDP
ב. נתון ששטח המשולש ΔABP קטן בששה סמ"ר משטח המשולש ΔBCE. חשבו את שטח המקבילית ABCD.

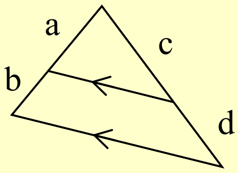
תשובות: 1) א. 24 סמ"ר. **ב.** 12 סמ"ר. **ג.** 24 סמ"ר. **2) א. 1.** 4k. **2.** 4k. **3.** 6k. **ב.** 48 סמ"ר.

משפט תאלס

תאלס איש מילטוס (624-546 לפנה״ס בקירוב) היה פילוסוף, מתמטיקאי, ואחד משבעת חכמי יוון העתיקה. הישגו המדעי המוכר הוא הוכחת **משפט תאלס**.

משפט תאלס: שני קטעים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

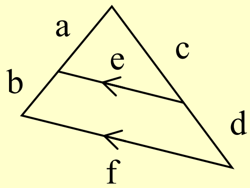
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$



משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות אחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים. ההרחבה מתייחסת לשני מקרים:

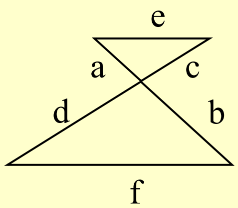
הרחבה א׳:

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}=\frac{e}{f}$$



הרחבה ב׳:

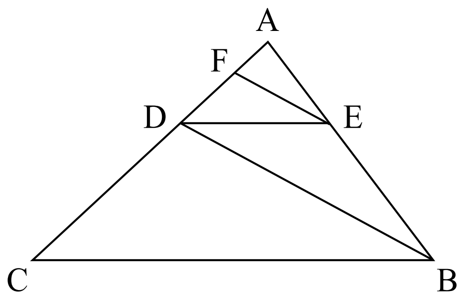
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$



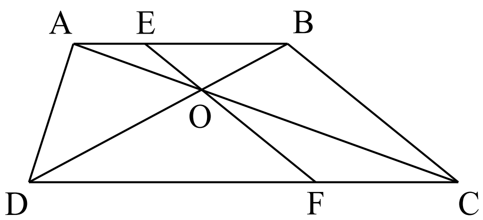
משפט תאלס (הפוך): שני קטעים המקצים על שוקי זווית 4 קטעים פרופורציוניים הם מקבילים.

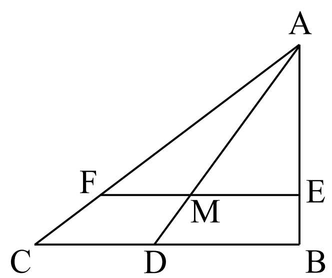
*כאשר מתקיימים היחסים המופיעים **בהרחבה א׳**, אין הכרח שהקטעים e ו-f מקבילים.

1. הנקודות D, E ו-F נמצאות על צלעות המשולש ΔABC
כך ש: $EF \parallel BD$, $DE \parallel BC$, $AC=12.5$ ס״מ, $AB=10$ ס״מ, $AE=4$ ס״מ. חשבו את:
   א. אורכי הקטעים AF ו-DF.
   ב. היחס בין שטחי המשולשים: $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta BCD}}$.



2. הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הבסיסים AB ו-CD בטרפז ABCD. הקטע EF עובר דרך נקודת מפגש האלכסונים O ומקביל לשוק BC.
   א. הוכיחו: $\frac{AE}{EO}=\frac{AB}{BC}$.
   ב. נתון: $AE=3$ ס״מ, $BE=2EO$.
   השוק BC ארוכה מהקטע EO ב-6 ס״מ. חשבו את אורך EO.



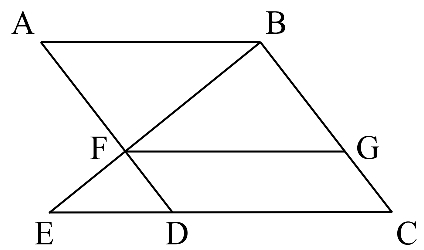


.3 המשכי שוקי הטרפז BCFE נחתכים בנקודה A. הנקודה D נמצאת על הצלע BC כך שהקטעים AD ו-EF נחתכים בנקודה M.

א. הוכיחו : $\frac{EM}{BD}=\frac{MF}{CD}$.

ב. נתון : $BC=16$ ס"מ , $EM=6.75$ ס"מ , $AE=3BE$.
חשבו את אורכי הקטעים CD ו-MF.

ג. נתון : $AB=12$ ס"מ , $AE\perp EF$. חשבו את היקף המשולש ΔAFM .

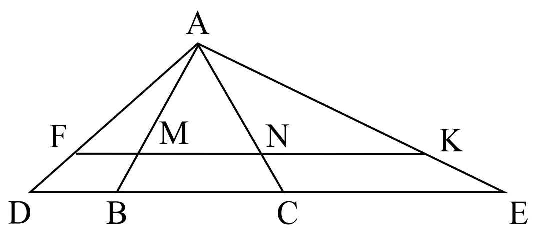


.4 הנקודות F ו-G נמצאות על צלעות המעוין ABCD.
המשכי הקטעים BF ו-CD נחתכים בנקודה E. נתון : $\frac{BG}{CG}=\frac{AB}{DE}$.

א. הוכיחו : $FG \parallel CE$.

ב. הוכיחו : $\frac{BG}{CG}=\frac{CD}{DE}$.

ג. נתון : $CE=64$ ס"מ , $DF=15$ ס"מ ($DE<CD$). חשבו את אורך הקטע GF.



.5 (*) הנקודות B, C, F ו-K נמצאות על צלעות המשולש ΔADE כמתואר בשרטוט. הקטעים AB ו-AC חותכים את הקטע FK בנקודות M ו-N בהתאמה. המשולש ΔABC שווה צלעות והיקפו 18 ס"מ. נתון : $KF \parallel DE$, $DE=17$ ס"מ , $AF=6$ ס"מ , $DF=2$ ס"מ , $BD=3$ ס"מ . חשבו את :

א. היקף המשולש ΔAFN .

ב. היחס בין שטחי הטרפזים : $\frac{S_{BDFM}}{S_{CEKN}}$.

תשובות:

1) א. $AF=2$ ס"מ , $DF=3$ ס"מ . **ב.** $\frac{2}{3}$.

2) ב. 3 ס"מ.

3) ב. $CD=7$ ס"מ , $MF=5.25$ ס"מ . **ג.** 31.5 ס"מ.

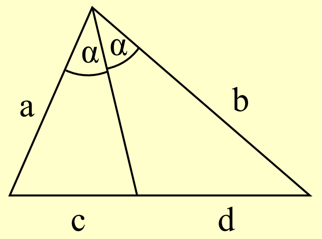
4) ג. 40 ס"מ.

5) א. 17.25 ס"מ. **ב.** $\frac{3}{8}$.

משפט חוצה הזווית במשולש

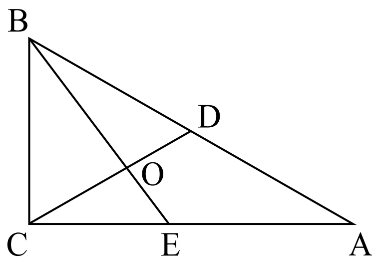
משפט חוצה הזווית (הפנימית): חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים שהיחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.

בשרטוט: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

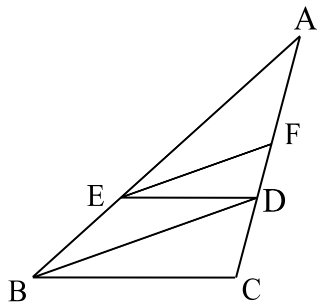


משפט הפוך: ישר העובר דרך קודקוד משולש ומחלק את הצלע שמול הקודקוד חלוקה פנימית ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה), חוצה את זווית המשולש שדרך קודקודה הוא עובר.

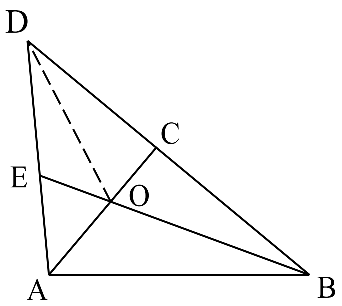
1. במשולש ישר הזווית ΔABC $(\sphericalangle ACB=90°)$,
חוצה הזווית BE והתיכון CD נחתכים בנקודה O.
נתון: $BC=66$ ס"מ, $AB=110$ ס"מ. חשבון את:
א. אורך התיכון CD.
ב. אורכי הקטעים AE ו-CE.
ג. אורך הקטע DO.



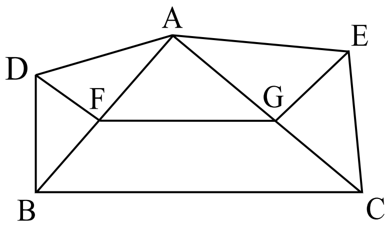
2. הנקודות D, E ו-F נמצאות על צלעות המשולש ΔABC
כך ש: $BC \parallel DE$. הקטעים BD ו-EF חוצים את הזוויות $\sphericalangle ABC$
ו- $\sphericalangle AED$ בהתאמה.
א. הוכיחו: $\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{BE}$.
ב. נתון: $BC=9a$, $AB=18a$. הביעו באמצעות a את אורך הקטע DE.
ג. נתון: $AC=15a$. הביעו באמצעות a את אורך AF.



3. (*) במשולש ΔABD, הגובה AC וחוצה הזווית BE נחתכים בנקודה O.
נתון: $\sphericalangle D=45°$, $AC=18$ ס"מ, $BC=24$ ס"מ. חשבון את:
א. אורך הקטע CO.
ב. שטח המשולש ΔBDO.
ג. היחס: $\frac{AE}{AD}$.



4. הנקודות D ו-E נמצאות מחוץ למשולש ΔABC.
הנקודות F ו-G נמצאות על צלעות המשולש ΔABC כך שהקטעים DF ו-EG חוצים בהתאמה את הזוויות $\measuredangle ADB$ ו- $\measuredangle AEC$. נתון: $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{BD}$.

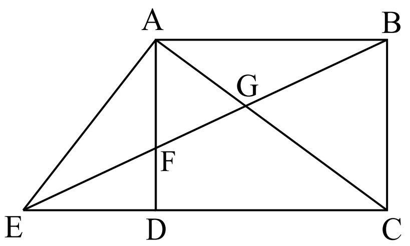


א. הוכיחו: המרובע BCGF הוא טרפז.

ב. נתון: $AG = 3$ ס״מ, $CG = 2$ ס״מ, $BC = 7.5$ ס״מ. חשבו את אורך הקטע FG.

ג. (*) קבעו אם ייתכן ש: $DF \perp AB$. נמקו.

5. (*) במלבן ABCD הנקודה E נמצאת על המשך הצלע CD כך שהקטע BE חוצה את הזווית $\measuredangle AEC$ וחותך את הקטעים AC ו-AD בנקודות G ו-F בהתאמה.

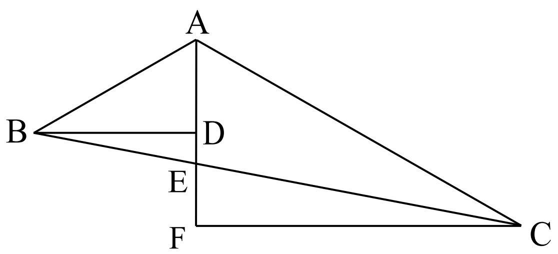


א. הוכיחו: $\frac{AF}{BC}=\frac{AE}{CE}$.

ב. נתון: $AB = 10$ ס״מ, $AD = 8$ ס״מ.
חשבו את אורך הקטע AF.

ג. חשבו את היחס: $\frac{CG}{AG}$.

6. הנקודה E נמצאת על הצלע BC במשולש ΔABC.
מהקודקודים B ו-C מורידים אנכים לקטע AE ולהמשכו כך שמתקיים: $BD \perp AF$, $CF \perp AF$.
נתון: $AD = 3$ ס״מ, $AB = 5$ ס״מ, $DF = 3$ ס״מ, $AC = 10$ ס״מ.



א. הוכיחו: הקטע AE חוצה את הזווית $\measuredangle BAC$.

ב. נסמן: $BC = 18m$. הביעו באמצעות m את אורך BE.

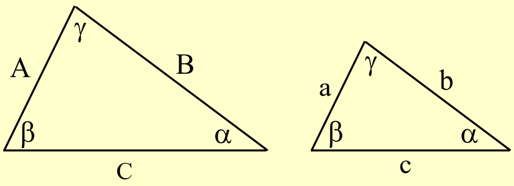
תשובות:

1) א. 55 ס״מ. **ב.** $CE = 33$ ס״מ, $AE = 55$ ס״מ. **ג.** 25 ס״מ. **2) ב.** $6a$. **ג.** $6\frac{2}{3}a$.

3) א. 8 ס״מ. **ב.** 168 סמ״ר. **ג.** $\frac{5}{12}$. **4) ב.** 4.5 ס״מ. **ג.** לא. **5) ב.** 5 ס״מ. **ג.** $\frac{8}{5}$. **6) ב.** $6m$.

דמיון משולשים

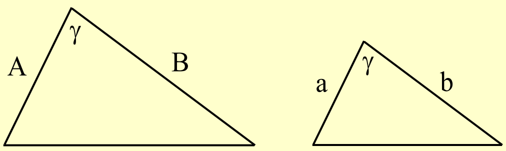
משולשים דומים הם משולשים שבהם לכל זווית במשולש אחד יש זווית ששווה לה במשולש האחר, וקיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות המתאימות (צלעות מתאימות נמצאות מול זוויות שוות).



יחס זה נקרא יחס הדמיון. המשולשים בשרטוט הם דומים ומתקיים: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$.

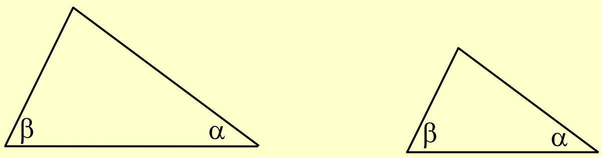
משפט דמיון צ.ז.צ:

שני משולשים בהם קיים יחס שווה בין **שני** זוגות צלעות מתאימות והזווית **שביניהן** שווה - הם משולשים דומים.



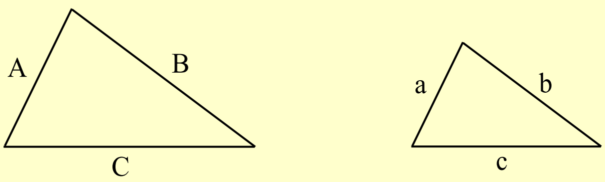
לפי השרטוט, אם קיימת זווית משותפת γ ומתקיים שוויון היחסים $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$ אז המשולשים דומים.

משפט דמיון ז.ז.: שני משולשים בהם שוות בהתאמה שתי זוויות הם דומים.

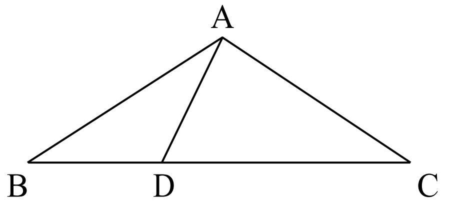


בהתאם לשרטוט, אם בשני משולשים יש שתי זוויות שוות, אז המשולשים דומים.

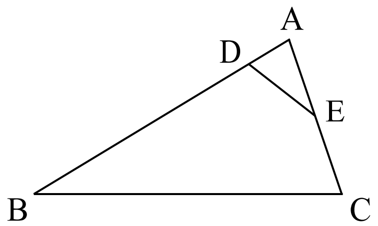
משפט דמיון צ.צ.צ: שני משולשים בהם קיים יחס שווה בין שלושת זוגות הצלעות הם דומים.



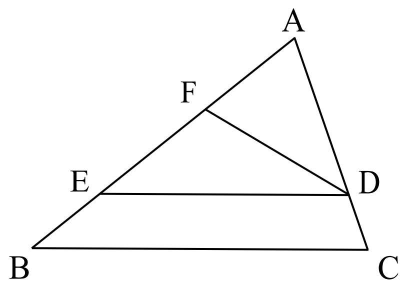
כלומר, בהתאם לשרטוט, אם מתקיים שוויון היחסים : $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}$ בין שני משולשים, אז הם דומים ולכן גם זוויותיהם שוות בהתאמה.



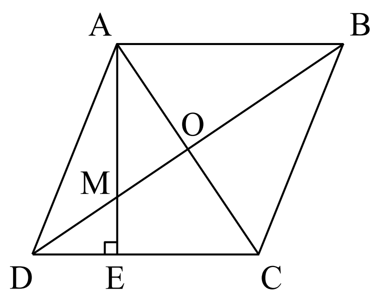
1. הנקודה D נמצאת על הבסיס BC במשולש שווה השוקיים ΔABC ששטחו 768 סמ״ר. נתון: $BC = 64$ ס״מ.
   א. חשבו את היקף המשולש ΔABC.
   ב. נתון: $CD = 39$ ס״מ. הוכיחו: $\Delta ABD \sim \Delta BCA$.
   ג. חשבו את היקף המשולש ΔACD.
   ד. קבעו איזו מהזוויות $\measuredangle CAD$ או $\measuredangle ADC$ גדולה יותר. נמקו.



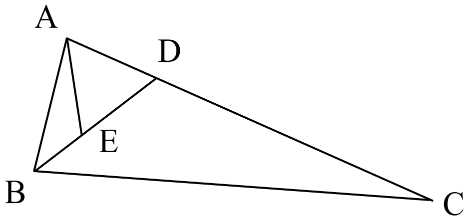
2. הנקודות D ו-E נמצאות על צלעות המשולש ΔABC. הנקודה E היא אמצע הצלע AC. נתון: $AE = 2AD$, $BD = 7AD$. היקף המשולש ΔAED הוא 9 ס״מ והיקף המרובע BCED הוא 33 ס״מ.
   א. חשבו את היקף המשולש ΔABC.
   ב. נסמן את השטח: $S_{\Delta ADE} = k$. העבירו את הקטע CD,
   היעזרו במשפט העזר בשטחים והביעו באמצעות k את שטח המשולש ΔABC.



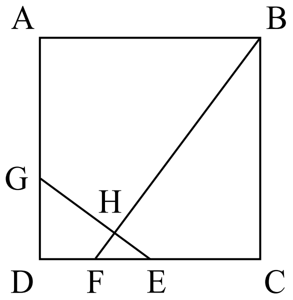
3. המשכי שוקי הטרפז BCDE נחתכים בנקודה A.
   הנקודה F נמצאת על הקטע AE. נתון: $\measuredangle ADF = \measuredangle ABC$,
   $AC = 4$ ס״מ , $AD = 3$ ס״מ , $AB = 6$ ס״מ.
   א. חשבו את אורכי הקטעים AF ו-EF.
   ב. נתון: הקטע DE ארוך ב-1.5 ס״מ מהקטע DF.
   חשבו את אורך הקטע BC.



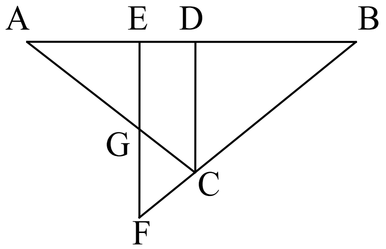
4. אלכסוני המעוין ABCD נחתכים בנקודה O.
   הגובה AE חותך את האלכסון BD בנקודה M.
   א. הוכיחו: $\Delta ABO \sim \Delta MAO$.
   ב. נתון שהיקף המעוין ABCD הוא 80 ס״מ, $AC = 24$ ס״מ.
   חשבו את אורך הקטע MO.
   ג. הוכיחו: $\Delta MAO \sim \Delta MDE$.
   ד. חשבו את אורך הקטע DE.



5. (*) הקטע BD הוא חוצה הזווית $\sphericalangle ABC$ במשולש ΔABC.
הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על הצלע AC ועל חוצה הזווית BD כך שהמשולש ΔADE הוא שווה צלעות.
א. הוכיחו: $\frac{DE}{CD}=\frac{AB}{BC}$.
ב. נתון: $CD=3k$, $AE=k$. הביעו באמצעות k את אורך BE.
ג. נתון: שטח המשולש ΔABC הוא 72 סמ"ר.
חשבו את שטח המשולש ΔABE.



6. נתון הריבוע ABCD ששטחו 1,600 סמ"ר. הנקודה E היא אמצע הצלע CD והנקודה F היא אמצע הקטע DE. הנקודה G נמצאת על AD כך שהקטעים BF ו-GE נחתכים בנקודה H. נתון: $AG=25$ ס"מ.
א. הוכיחו: $\Delta DGE \sim \Delta CFB$.
ב. הוכיחו: $\sphericalangle EHF=90^\circ$.
ג. חשבו את אורכי הקטעים HE ו-HF.
ד. חשבו את שטח המרובע ABHG.



7. הנקודות D, E ו-G נמצאות על צלעות המשולש ΔABC כמתואר בשרטוט. המשכי הקטעים EG ו-BC נחתכים בנקודה F.
הנקודות D ו-G הן בהתאמה אמצעי הקטעים AB ו-EF.
נתון: $AB=24$ ס"מ, $DE=4$ ס"מ, $BF=20$ ס"מ, $AG=10$ ס"מ.
א. הוכיחו: $\Delta AEG \sim \Delta BEF$.
ב. היעזרו בסעיף א' והסבירו מדוע מתקיים: $\sphericalangle AEG=90^\circ$.
ג. חשבו את אורך הקטע EF.
ד. קבעו איזה סוג של מרובע הוא DEFC וחשבו את היקפו.

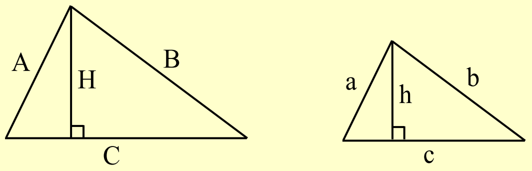
תשובות:

1) א. 144 ס"מ. **ג.** 104 ס"מ. **ד.** $\sphericalangle ADC$. **2) א.** 36 ס"מ. **ב.** 16k.
3) א. $AF=2$ ס"מ, $EF=2.5$ ס"מ. **ב.** 6 ס"מ. **4) ב.** 9 ס"מ. **ד.** 5.6 ס"מ.
5) ב. 0.5k. **ג.** 6 סמ"ר. **6) ג.** $HE=8$ ס"מ, $HF=6$ ס"מ. **ד.** 874 סמ"ר.
7) ג. 12 ס"מ. **ד.** טרפז ישר זווית שהיקפו 30 ס"מ.

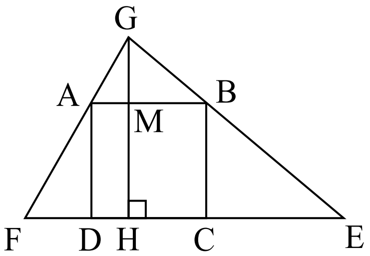
יחס הגבהים במשולשים דומים

משפט: במשולשים דומים יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.

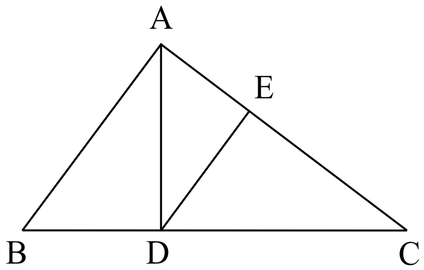
בהתאם לשרטוט, אם המשולשים דומים אז מתקיים שוויון היחסים: $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{H}{h}$.



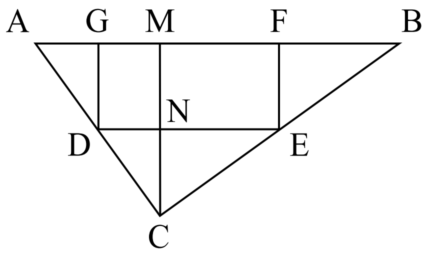
1. במשולש ΔEFG חסום הריבוע ABCD כמתואר בשרטוט.
הגובה GH חותך את הצלע AB בנקודה M.
נתון: $CE=6$ ס״מ, $DF=2$ ס״מ, $MG=2$ ס״מ. חשבו את:
א. שטח הריבוע ABCD.
ב. שטח המשולש ΔCEM.



2. הקטעים AD ו-DE הם הגבהים ליתר במשולשים ישרי הזווית ΔABC ו- ΔCAD בהתאמה.
א. הוכיחו: $\Delta ABC \sim \Delta DAC$.
ב. הוכיחו: $AD\cdot AC=BC\cdot DE$.
ג. נתון שהצלע BC ארוכה ב-25 ס״מ מהצלע AC.
הגובה AD ארוך ב-25% מהגובה DE. חשבו את אורך AB.



3. (*) במשולש ΔABC חסום המלבן DEFG כמתואר בשרטוט.
הגובה CM חותך את הקטע DE בנקודה N.
נתון: $GF=3EF$, $AB=3$ ס״מ. נסמן: $CM=a$.
א. הביעו באמצעות a את אורך הקטע EF.
ב. נתון: היקף המלבן GFED הוא ארבעה ס״מ. מצאו את a.
ג. הוכיחו: $BE=CE$.



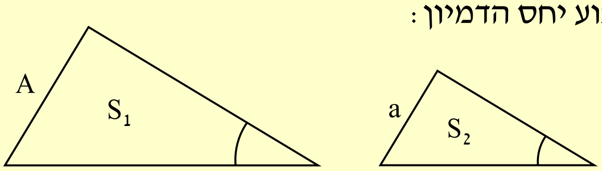
תשובות:

1) א. 16 סמ״ר. **ב.** 12 סמ״ר. **2) ג.** 75 ס״מ. **3) א.** $\frac{a}{a+1}$. **ב.** $a=1$.

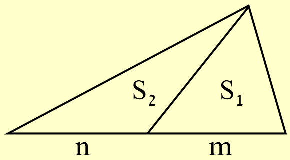
יחס השטחים במשולשים דומים

במשולשים דומים יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון:

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{A}{a}\right)^2$$



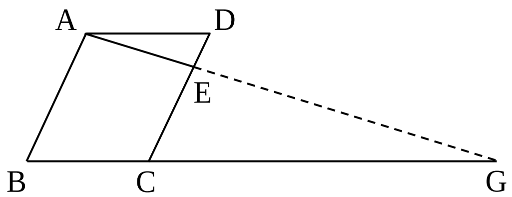
תזכורת! משפט עזר בשטחים: ישר המחבר בין קודקוד המשולש לבין הצלע שמולו, מחלק את המשולש לשני משולשים שהיחס בין שטחיהם הוא כיחס החלוקה של הצלע המחולקת.



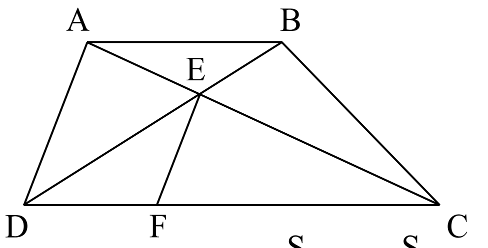
בשרטוט מתקיים: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{m}{n}$

שימו לב! יש להוכיח את המשפט **בכל פעם שנשתמש בו** על ידי הורדת גובה משותף בשני המשולשים.

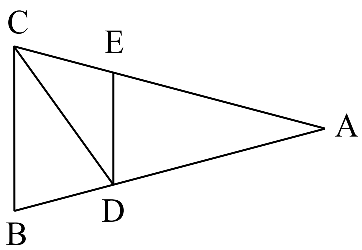
1. הנקודה E נמצאת על הצלע CD במקבילית ABCD.
המשכי הקטעים AE ו-BC נחתכים בנקודה G.
שטח המשולש ΔADE הוא 1 סמ"ר. נתון: $CD=4DE$.
א. הוכיחו: $\Delta ADE\sim\Delta GCE$.
ב. חשבו את שטח: 1. המשולש ΔCGE. 2. המקבילית ABCD.



2. אלכסוני הטרפז ABCD $(AB||DC)$ נחתכים בנקודה E.
הנקודה F נמצאת על CD. נתון: $CD=2AB$, $EF||AD$.
א. חשבו את היחס: $\frac{EF}{AD}$.
ב. נתון השטח: $S_{\Delta ABE}=12s$. הביעו באמצעות s את השטחים: S_{ADFE}, $S_{\Delta DEF}$.



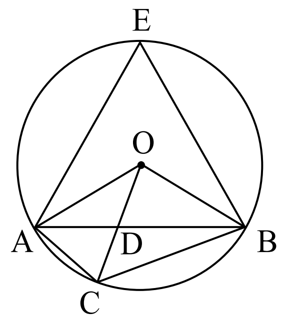
3. (*) המשכי שוקי הטרפז BCED נחתכים בנקודה A.
שטח הטרפז BCED גדול פי 1.25 משטח המשולש ΔADE.
נתון: $AC=6b$, $BC=3b$.
א. הוכיחו: הקטע CD הוא חוצה זווית במשולש ΔABC.
ב. נתון: $AB=AC$. קבעו איזה מההיקפים - של המשולש ΔADE או של הטרפז BCED - הוא גדול יותר. נמקו.



תשובות: 1) ב. 1. 9 סמ"ר. **2.** 8 סמ"ר. **2) א.** $\frac{2}{3}$. **ב.** $S_{ADFE}=40s$, $S_{\Delta DEF}=16s$.
3) ב. היקף המשולש ΔADE.

מעגל ללא פרופורציה ודמיון

1. הנקודות A, C, B ו-E נמצאות על מעגל שמרכזו בנקודה O. הרדיוס CO והמיתר AB נחתכים בנקודה D. נתון: $\sphericalangle ABC = 20°$, $\sphericalangle BAC = 40°$.



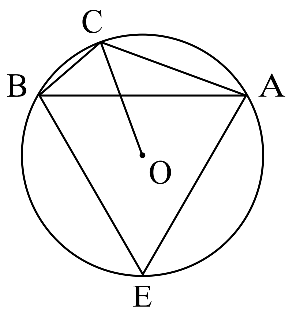
א. חשבו את גודל הזוויות $\sphericalangle AEB$ ו- $\sphericalangle BAO$.

ב. מהו מיקום הנקודה E שעבורו שטח המשולש ΔABE הוא מקסימלי? הסבירו את תשובתכם.

ג. רון טען שהמשולש ΔABE הוא בהכרח שווה צלעות. האם הוא צודק? הסבירו את תשובתכם.

ד. נתון: $\sphericalangle EAO = 30°$. הוכיחו: $AE = BE$.

2. (*) המשולש שווה הצלעות ΔABE חסום במעגל שמרכזו בנקודה O. נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.



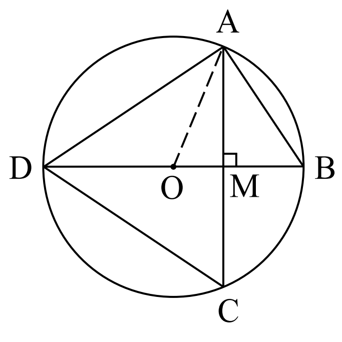
א. חשבו את הסכום: $\alpha + \beta$.

ב. חשבו את היחס בין אורך הקשת AB הארוכה לאורך הקשת AB הקצרה.

ג. קבעו אם ייתכן משולש שזוויותיו: α, $2\beta + \alpha$, $\beta + 2\alpha$. נמקו.

ד. נתון מרובע ששלוש מזוויותיו הן: $3\beta + \alpha$, $\beta + \alpha$, ו- 2α. חשבו את זוויתו הרביעית.

3. המשולש ΔABD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O. הנקודה C נמצאת על המעגל. נתון: $\sphericalangle DAO = \sphericalangle CAO$, $AC \perp BD$.

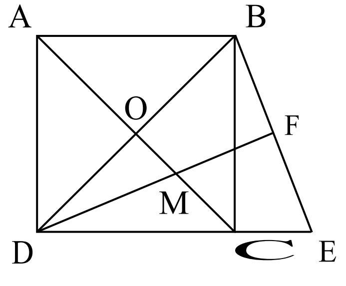


א. חשבו את הזווית $\sphericalangle ABD$.

ב. הוכיחו: $AD = CD$.

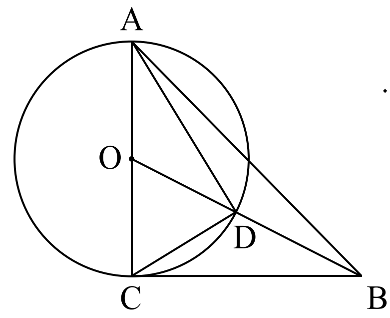
ג. המיתרים AC ו- BD נחתכים בנקודה M. נסמן: $BM = a$. הביעו באמצעות a את אורך הקטע DM.

4. אלכסוני הריבוע ABCD נחתכים בנקודה O. הנקודה E נמצאת על המשך הצלע CD. הקטע DF הוא התיכון לבסיס במשולש שווה השוקיים ΔBDE. הוכיחו שהנקודה M היא מרכז המעגל:

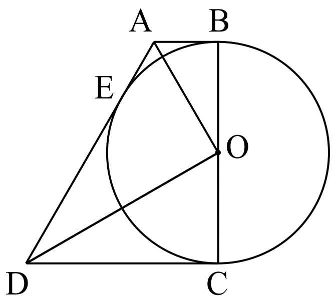


א. החוסם את המשולש ΔBDE.

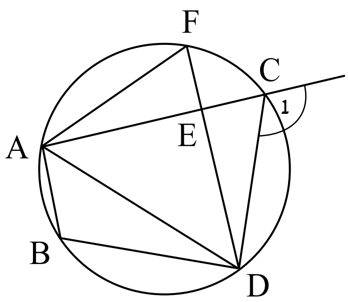
ב. החסום במשולש ΔBCD.



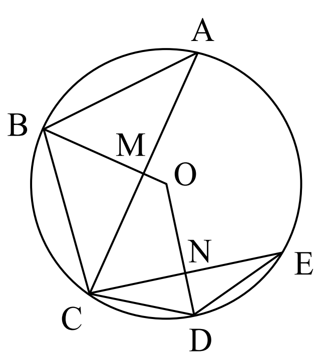
5. נתון המשולש ישר הזוויות ושווה השוקיים ΔABC $(AC \perp BC)$.
הנקודה O היא מרכז מעגל שקוטרו AC. המעגל חותך את BO בנקודה D.
א. הוכיחו: הקשת הקצרה AD חוצה את היתר AB.
ב. נסמן: $\sphericalangle CAD = \alpha$. הביעו באמצעות α את הזוויות:
1. $\sphericalangle BAD$ 2. $\sphericalangle ABD$
ג. עבור כל טענה קבעו אם היא נכונה או שגויה. נמקו:
i. ייתכן שמתקיים: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBO$.
ii. ייתכן שמתקיים: $\sphericalangle CDO = \sphericalangle BAD$.
iii. לא ניתן להרכיב משולש שזוויותיו הן: $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle ABD$ ו- $\sphericalangle BDC$.



6. (*) הקטעים AD ,AB ו-CD משיקים למעגל שמרכזו O
בנקודות B, E ו-C בהתאמה. הקטע BC הוא קוטר במעגל.
א. הוכיחו: $\sphericalangle AOD = 90^\circ$.
ב. עבור כל טענה, קבעו אם היא נכונה או שגויה. נמקו את תשובתכם.
i. $\Delta ADO \cong \Delta ODC$ ii. $\Delta ABO \sim \Delta AOD$
ג. נתון: $\sphericalangle AOB = 30^\circ$, $AB = m$.
עבור כל טענה, קבעו אם היא נכונה או שגויה. הסבירו.
i. $CD = 3m$ ii. $AD = 3.5m$ iii. $OE = \sqrt{3}m$

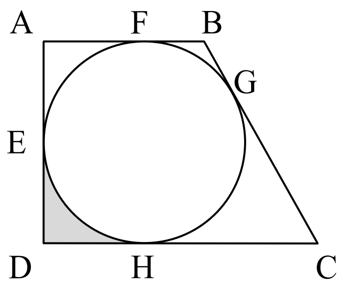


7. הנקודות A, B, C, D ו-F נמצאות על מעגל.
המיתרים AC ו-DF נחתכים בנקודה E.
א. הוכיחו: $\sphericalangle ABD = \sphericalangle C_1$.
ב. נתון: $AE = ED$, $AD = AC$, $\sphericalangle AED = 90^\circ$.
חשבו את הזוויות $\sphericalangle CAF$ ו- $\sphericalangle ABD$.

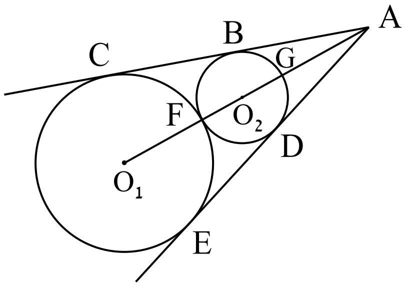


8. במעגל שמרכזו בנקודה O, הרדיוס BO חותך את המיתר AC בנקודה M.
הרדיוס DO חותך את המיתר CE בנקודה N.
נתון: $AB = BC$, $\sphericalangle DCE = \sphericalangle CED$.
א. הוכיחו: ניתן לחסום במעגל את המרובע CMON.
ב. (*) נתון: הזווית $\sphericalangle MON$ קהה. הוכיחו: $MN < CO$.

9. הטרפז ABCD ישר הזווית $(\angle BAD = 90^\circ)$ חוסם מעגל.
המעגל משיק לצלעות הטרפז בנקודות E, F, G ו-H.
נתון: $BC = 10$ ס"מ, $AD = 8$ ס"מ. חשבו את:
א. היקף הטרפז ABCD.
ב. שטח הטרפז ABCD.
ג. סכום השטחים הכלואים בין הטרפז ABCD לבין המעגל.
ד. ההיקף והשטח של הצורה הצבועה באפור בשרטוט.



10. שני מעגלים שמרכזיהם O_1 ו- O_2 משיקים זה לזה בנקודה F.
רדיוס המעגל שמרכזו O_1 ארוך פי שניים מרדיוס המעגל שמרכזו O_2. מהנקודה A יוצאים שני ישרים, המשיקים למעגלים בנקודות B, C, D ו-E כמתואר בשרטוט. הישר העובר דרך מרכזי המעגלים חותך את המעגל שמרכזו O_2 בנקודה G.
א. הוכיחו: הקטע AG שווה באורכו לרדיוס המעגל שמרכזו O_1.
ב. נתון: היקף הדלתון ACO_1E הוא 40 ס"מ.
חשבו את היקף הדלתון ABO_2D.



תשובות:

1) א. $\angle AEB = 60^\circ$, $\angle BAO = 30^\circ$. **ב.** כאשר הנקודה E נמצאת באמצע הקשת AB הארוכה. **ג.** רון טועה. במשולש ΔABE ידוע ש: $\angle AEB = 60^\circ$ אך אין מידע נוסף לגבי זוויות וצלעות במשולש.

2) א. 60°. **ב.** 1:2. **ג.** לא. **ד.** 120°. **3) א.** 60°. **ג.** 3a.

5) ב. 1. $45^\circ - \alpha$. **2.** $2\alpha - 45^\circ$. **ג. i.** שגויה. **ii.** שגויה. **iii.** נכונה.

6) ב. i. שגויה. **ii.** נכונה. **ג. i.** נכונה. **ii.** שגויה. **iii.** נכונה.

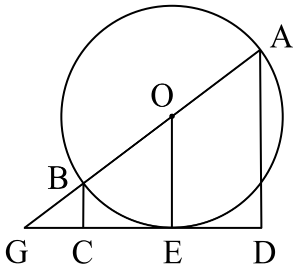
7) ב. $\angle CAF = 22.5^\circ$, $\angle ABD = 112.5^\circ$.

9) א. 36 ס"מ. **ב.** 72 סמ"ר. **ג.** 21.73 סמ"ר.
ד. השטח 3.43 סמ"ר $= 16 - 4\pi$. ההיקף 14.28 ס"מ $= 8 + 2\pi$.

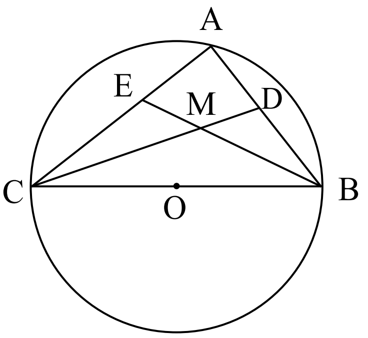
10) ב. 20 ס"מ.

מעגל עם פרופורציה ודמיון

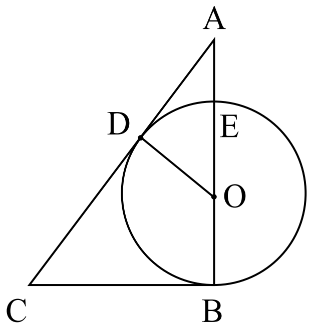
1. הקטע GD משיק למעגל שמרכזו O בנקודה E. ‏AB הוא קוטר.
הנקודות C ו-D נמצאות על DG כך שמתקבל הטרפז ישר הזווית ABCD ‏($AD \parallel BC$).
א. הוכיחו: OE קטע אמצעים בטרפז.
ב. נתון: $AD = 24$ ס״מ, $GD = 32$ ס״מ. חשבו את שטח העיגול.
ג. חשבו את שטח המשולש ΔBCG.



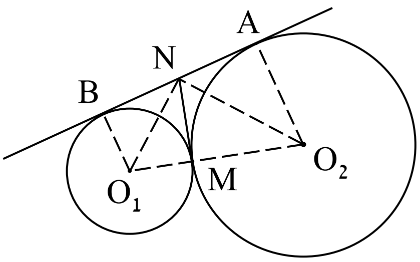
2. המשולש ΔABC חסום במעגל שמרכזו O. הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על המיתרים AB ו-AC. הקטע BC הוא קוטר. הקטעים BE ו-CD נחתכים בנקודה M שהיא מרכז המעגל **החסום** במשולש ΔABC.
נתון: $AB = 6$ ס״מ, $BC = 10$ ס״מ. חשבו את:
א. אורך הקטע AE. ב. שטח המשולש ΔADE.



3. נתון המשולש ישר הזווית ΔABC. מעגל שרדיוסו R ומרכזו בנקודה O הנמצאת על הניצב AB, עובר דרך הקודקוד B ומשיק ליתר AC בנקודה D.
נתון: $AE = 2$ ס״מ, $AD = 4$ ס״מ, $BC = 6$ ס״מ.
א. הוכיחו: $\Delta ADO \sim \Delta ABC$.
ב. חשבו את שטח העיגול.
ג. הוכיחו: המרובע BCDO בר חסימה.
ד. הוסיפו לשרטוט את המעגל החוסם את המרובע BCDO. חשבו את שטחו.



4. מעגל שמרכזו בנקודה O_1 ושטחו 81π סמ״ר משיק בנקודה M למעגל שמרכזו בנקודה O_2 והיקפו 32π ס״מ. הקטעים AB ו-MN משיקים למעגלים בנקודות A, B ו-M כמתואר בשרטוט.
א. הוכיחו: 1. $\angle O_1NO_2 = 90^\circ$ 2. $\Delta ANO_2 \sim \Delta BO_1N$
ב. חשבו את אורך הקטע AB.



תשובות:

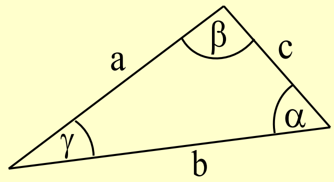
1) ב. ‏706.86 סמ״ר $= 225\pi$. **ג.** 24 סמ״ר. **2) א.** 3 ס״מ. **ב.** 4 סמ״ר.

3) ב. ‏$9\pi = 28.27$ סמ״ר. **ד.** ‏$11.25\pi = 35.34$ סמ״ר. **4) ב.** 24 ס״מ.

טריגונומטריה - משפט הסינוסים והקוסינוסים

משפט הסינוסים מתקיים בכל משולש:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$



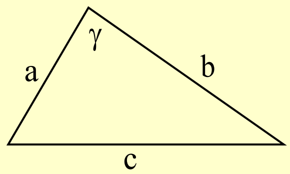
ניתן להשתמש במשפט הסינוסים כאשר:

- ידועים אורכי שתי צלעות והזווית שמול אחת מהן **(צ.צ.ז)** ונרצה לחשב את הזווית שמול הצלע השנייה.
- ידועות שתי זוויות ואורך של צלע שמול אחת מהן **(ז.ז.צ)** ונרצה לחשב את אורך הצלע השנייה.

שימו לב! כאשר יש בידינו את ערכו של סינוס הזווית ואנו מעוניינים למצוא בעזרתו את הזווית עצמה, עלינו לזכור כי לאור הזהות: $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, למעשה **שתי זוויות שונות** מתאימות לאותו ערך של סינוס. לדוגמה, עבור $\sin\alpha=0.5$ נקבל במחשבון ש: $\alpha=30°$ אך למעשה גם $\alpha=150°$.
בהתאם לנתוני השאלה, נבחר בזווית החדה או הקהה.

בעזרת משפט הסינוסים ניתן להוכיח **נוסחה נוספת לחישוב שטח המשולש:** $S=\frac{a^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{2\sin\alpha}$.

משפט הקוסינוסים מתקיים בכל משולש וניתן להציגו בשתי דרכים:

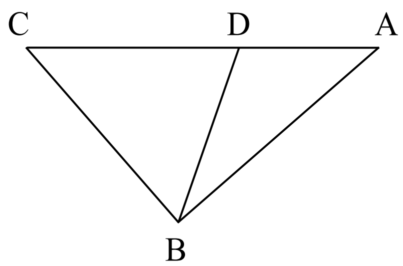


$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ או לאחר בידוד $\cos\gamma$: $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

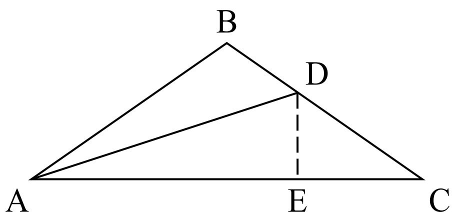
בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שתי צלעות והזווית שביניהן **(צ.ז.צ)** וברצוננו למצוא את הצלע השלישית.

בהצגה זו נשתמש כאשר ידועים לנו אורכי שלוש הצלעות **(צ.צ.צ)** וברצוננו למצוא את זוויות המשולש.

1. הנקודה D נמצאת על הצלע AC במשולש ΔABC.
שטחו של המשולש ΔBCD הוא 8 סמ״ר.
נתון: $\sphericalangle BAC=41°$, $BD=4$ ס״מ, $CD=5$ ס״מ. חשבו את:
א. גודל הזווית $\sphericalangle BDC$.
ב. אורך הצלע AB.
ג. שטח המשולש ΔABD.
ד. שטח המשולש ΔABC.



2. הקטע AD הוא חוצה זווית במשולש ΔABC שווה השוקיים ($AB = BC$) ששטחו 45 סמ"ר. במשולש ΔACD הקטע DE הוא גובה. נתון: $\sphericalangle ABC = 110^\circ$. חשבו את:

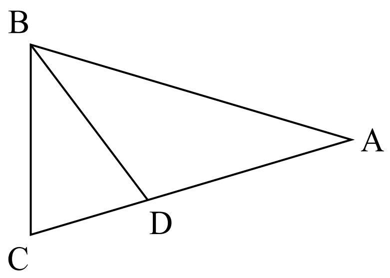


א. שטח המשולש ΔADE.

ב. היקף המשולש ΔADE.

ג. היקף המשולש ΔABD.

3. במשולש שווה השוקיים ΔABC ($AB = AC$), הקטע BD חוצה את הזווית $\sphericalangle ABC$. נסמן: $\sphericalangle DBC = \beta$, $AC = a$.



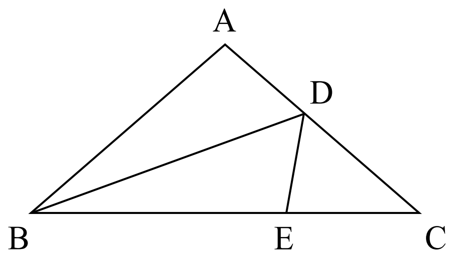
הביעו באמצעות β ו-a את:

א. אורך הצלע BC.

ב. אורך הצלע CD.

ג. שטח המשולש ΔABD.

4. הקטע BD הוא חוצה זווית במשולש שווה השוקיים ΔABC.
הנקודה E נמצאת על הבסיס BC. הקטע DE הוא חוצה זווית במשולש ΔBCD. נסמן: $CD = p$, $\sphericalangle ACB = 4\alpha$.

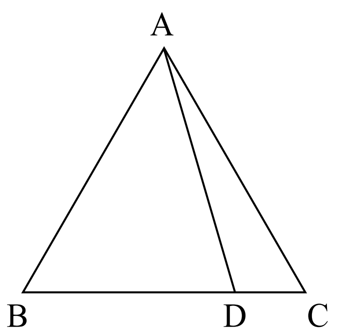


א. הביעו באמצעות α את הזווית $\sphericalangle CDE$.

ב. הביעו באמצעות p ו- α את:

1. אורך הקטע DE.
2. אורך הקטע BD.
3. שטח המשולש ΔBDE.

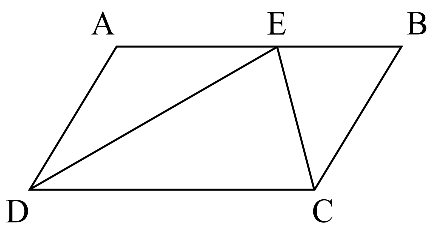
5. המשולש ΔABC הוא שווה צלעות והיקפו 24 ס"מ.
הנקודה D נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים: $BD = 3CD$.
הזווית $\sphericalangle ADC$ קהה.



א. חשבו את אורך הקטע BD.

ב. חשבו את אורך הקטע AD.

ג. מצאו את גודל הזווית $\sphericalangle ADB$.



6. הנקודה E נמצאת על הצלע AB במקבילית ABCD.

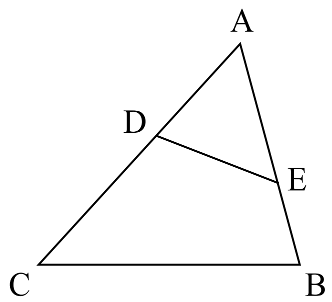
נתון: $AE=7$ ס"מ, $BC=4$ ס"מ, $BE=3$ ס"מ, $DE=2CE$.

א. חשבו את אורכי הקטעים CE ו-DE.

ב. חשבו את הזווית $\sphericalangle CED$.

ג. חשבו את שטח המשולש ΔCDE.

7. הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על הצלעות AC ו-AB במשולש ΔABC.



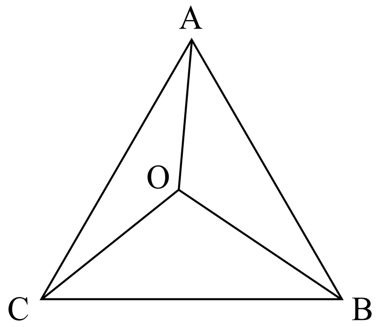
נתון: $DE=3$ ס"מ, $AE=4$ ס"מ. נסמן: $\sphericalangle AED=\alpha$.

א. הראו שמתקיים: $AD=\sqrt{25-24\cdot\cos\alpha}$.

ב. נתון: שטח המשולש ΔADE הוא חמישה סמ"ר.
מצאו את α וחשבו את הזווית החדה $\sphericalangle BAC$.

ג. נתון: $BE=2$ ס"מ, $CD=5$ ס"מ. חשבו את שטח המרובע BCDE.

8. (*) הנקודה O נמצאת בתוך המשולש שווה הצלעות ΔABC שהיקפו 6b. נתון: $\sphericalangle BAO=35°$.



א. אילו אורכים של קטעים ניתן להביע באמצעות b בעזרת הנתונים?
אין צורך להביע אותם.

ב. נתון: $AO=b$.

1. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ABO$.
2. הביעו באמצעות b את אורך הקטע CO.

ג. איזה נתון מהנתונים הבאים **אינו יכול** לסייע לנו למצוא את b?

i. $S_{\Delta ABO}=20$ סמ"ר ii. $BO=20$ ס"מ

iii. היחס בין אורך BO לבין אורך CO. iv. הצלע BC ארוכה ב-5 ס"מ מהקטע CO.

ד. נתון: היקף המשולש ΔAOC הוא 29 ס"מ. חשבו את שטחו.

תשובות: 1) א. $53.13°$. **ב.** 4.88 ס"מ. **ג.** 2.05 סמ"ר. **ד.** 10.05 סמ"ר. **2) א.** 19.22 סמ"ר. **ב.** 26.11 ס"מ.

ג. 25.06 ס"מ. **3) א.** $\frac{a\sin4\beta}{\sin2\beta}$. **ב.** $\frac{a\sin\beta\cdot\sin4\beta}{\sin2\beta\cdot\sin3\beta}$. **ג.** $\frac{a^2\sin\beta\cdot\sin4\beta}{2\sin3\beta}$. **4) א.** $90°-3\alpha$.

ב. 1. $\frac{p\cdot\sin4\alpha}{\cos\alpha}$. **2.** $\frac{p\cdot\sin4\alpha}{\sin2\alpha}$. **3.** $\frac{p^2\cdot\sin^2 4\alpha\cdot\cos3\alpha}{2\cos\alpha\cdot\sin2\alpha}$. **5) א.** 6 ס"מ. **ב.** 7.21 ס"מ. **ג.** $73.93°$.

6) א. $CE=4.41$ ס"מ, $DE=8.82$ ס"מ. **ב.** $91.97°$. **ג.** 19.45 סמ"ר.

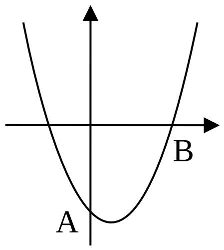
7) ב. $\alpha=56.44°$, $\sphericalangle BAC=46.85°$. **ג.** 13.45 סמ"ר.

8) א. ניתן להביע את אורכי הצלעות AB, BC ו-AC. **ב. 1.** $25.93°$. **2.** 1.17b. **ג.** iii. **ד.** 20.42 סמ"ר.

פונקציית פולינום

דוגמה: נגזרת הפולינום: $f(x)=x^6-3x^4+x^2-3x+6$ היא: $f'(x)=6x^5-12x^3+2x-3$.

ערך הנגזרת בנקודה שבה $x=1$ הוא: $f'(1)=6\cdot1^5-12\cdot1^3+2\cdot1-3=-7$.



1. גרף הפרבולה: $f(x)=x^2-2x-8$ חותך את הצירים בנקודות A ו-B כמתואר בשרטוט.
   א. מצאו את משוואת הישר עליו מונח הקטע AB.
   ב. דרך נקודה הנמצאת על גרף הפונקציה ברביע הרביעי העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לישר AB. מצאו את משוואת המשיק.
   ג. המשיק שמצאתם בסעיף ב' חותך את ציר ה-x בנקודה C ואת ציר ה-y בנקודה D. חשבו את שטח המרובע ABCD.

2. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^4-12x^3+36x^2$.
   א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:
      1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
      2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
      3. תחומי העלייה והירידה.
   ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
   ג. היעזרו בסקיצה של הפונקציה ועבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או שגויה:
      i. הישר $y=2$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בארבע נקודות.
      ii. הישר $y=81$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות.

3. נתונה הפונקציה: $f(x)=4x^3+15x^2-18x+1$.
   א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:
      1. שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-y.
      2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
      3. תחומי העלייה והירידה.
   ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
   ג. מצאו עבור אילו ערכי k יהיו למשוואה: $f(x)=k$ שלושה פתרונות. נמקו.
   ד. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=4\cdot f(x)$. מבלי לגזור את הפונקציה $g(x)$:
      1. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
      2. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון שלה וקבעו את סוגן. נמקו את תשובתכם.

4. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3-3m^2x$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ הביעו באמצעות הפרמטר החיובי m, במידת הצורך, את:

1. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
3. תחומי העלייה והירידה.
4. תחומי החיוביות והשליליות.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. לפניכם טענה:

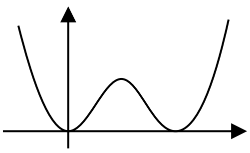
"ככל ש-m קרוב יותר ל-0, כך נקודות הקיצון של הפונקציה יהיו קרובות יותר זו לזו".

קבעו אם הטענה נכונה או שגויה. נמקו את תשובתכם.

ד. קבעו אם הפונקציה זוגית, אי זוגית או שאינה זוגית ואינה אי זוגית. נמקו את תשובתכם.

תשובות:

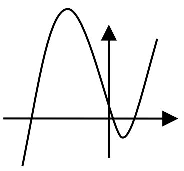
1) א. $y=2x-8$. **ב.** $y=2x-12$. **ג.** 20 יח"ר.

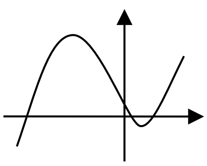


2) א. 1. (0,0), (6,0). **2.** min (6, 0), max (3,81), min (0,0).

3. עולה: $x>6$ או $0<x<3$; יורדת: $3<x<6$ או $x<0$.

ב. השרטוט משמאל. **ג. i.** נכונה. **ii.** שגויה.





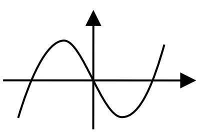
3) א. 1. (0, 1). **2.** max (-3, 82), min (0.5, -3.75).

3. עולה: $0.5<x$ או $x<-3$; יורדת: $-3<x<0.5$.

ב. השרטוט הימני. **ג.** $-3.75<k<82$.

ד. 1. השרטוט השמאלי.

2. max (-3, 328), min (0.5, -15).



4) א. 1. $(0,0)$, $(\sqrt{3}m,0)$, $(-\sqrt{3}m,0)$. **2.** $max(-m,2m^3), min(m,-2m^3)$.

3. עולה: $m<x$ או $x<-m$; יורדת: $-m<x<m$.

4. חיוביות: $\sqrt{3}m<x$ או $-\sqrt{3}m<x<0$;

שליליות: $0<x<\sqrt{3}m$ או $x<-\sqrt{3}m$.

ב. השרטוט משמאל. **ג.** נכונה. **ד.** אי זוגית.

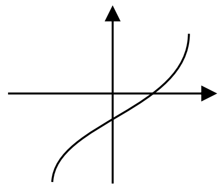
פונקציה מורכבת

בפרק זה נתייחס לביטוי "פונקציה מורכבת" כמייצג פונקציה המתקבלת כאשר נעלה פונקציית פולינום בשלמותה בחזקה טבעית כלשהי. לדוגמה: $f(x)=(x^3-2x)^5$, $g(x)=(x^2+x+1)^5$.

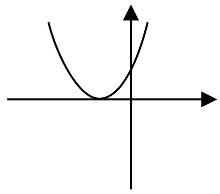
1. נתונה הפונקציה $f(x)=(8-2x)^4$.

א. מצאו איזה מהגרפים הבאים הוא גרף הפונקציה $f(x)$:

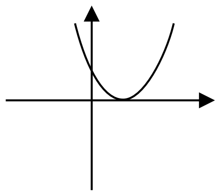
I.



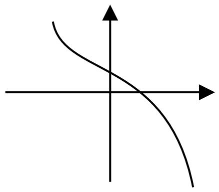
II.



III.



IV.



ב. היעזרו בסעיף א' ושרטטו באותה מערכת צירים סקיצות לגרפים של הפונקציות:
$f(x)$, $g(x)=-(8-2x)^4$, $h(x)=16-(8-2x)^4$.

ג. מבלי לפתור משוואה כלשהי, קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $h(x)=0$. הסבירו.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $h(x)$ עם ציר ה-x.

2. נתונה הפונקציה: $f(x)=2\cdot(2-x)^3+3x^2$.

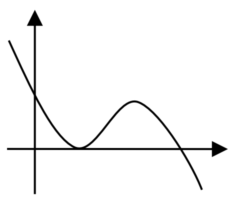
א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-y.
2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

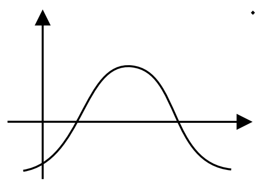
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. קבעו איזה מהגרפים הבאים עשוי להיות גרף הנגזרת $f'(x)$. נמקו.

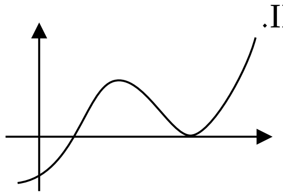
I.



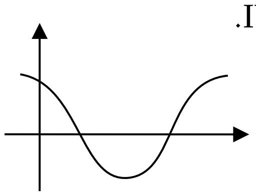
II.



III.



IV.



ד. (*) לפניכם המשוואה: $f(x)=f^3(x)$.

1. קבעו כמה פתרונות יש למשוואה זו. הסבירו.
2. האם ניתן לקבוע אם למשוואה יש פתרונות חיוביים או שליליים? הסבירו.

3. נתונה הפונקציה: $f(x)=(-x^4+8x^2)^3$.

א. 1. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

2. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

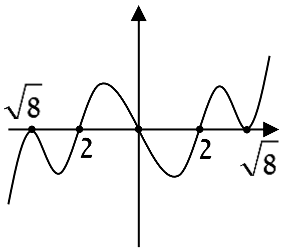
3. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

4. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. בשרטוט התייחסו לנקודות פיתול, אם יש כאלה.

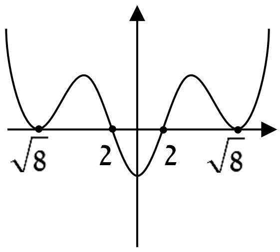
5. קבעו אם הפונקציה זוגית, אי זוגית או שאינה זוגית ואינה אי זוגית. נמקו את תשובתכם.

ב. מבין הגרפים הבאים עשוי להיות גרף הנגזרת $f'(x)$? נמקו.

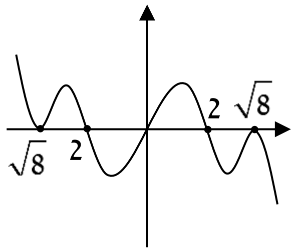
I.



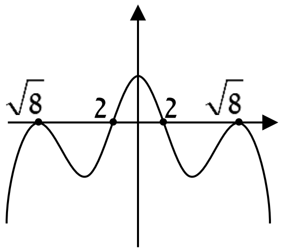
II.



III.



IV.



4. (*) אחת מנקודות הקיצון של גרף הפונקציה: $f(x)=bx-9+(5-x)^3$ נמצאת על הישר $x=4$.

א. מצאו את b.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה-y. 2. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. הפונקציה הקווית $g(x)=2x+8$ מוגדרת בתחום: $x_1 \le x \le x_2$.

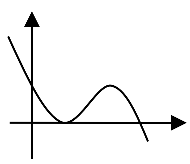
הישר המחבר בין נקודות המינימום של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מקביל לציר ה-y.

הישר המחבר בין נקודות המקסימום של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מאונך לציר ה-x.

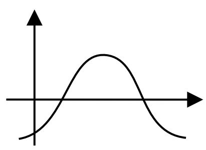
מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ ואת סוגן.

ה. קבעו איזה מהגרפים הבאים עשוי להיות גרף הנגזרת $f'(x)$. נמקו.

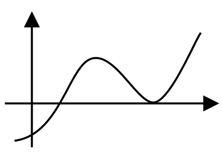
I.



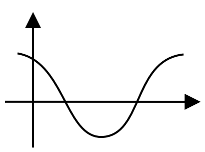
II.



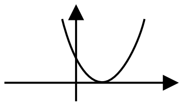
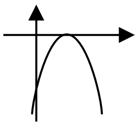
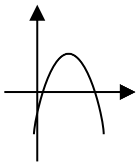
III.



IV.

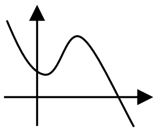


תשובות:

1) א. III. **ב.** $f(x)$:  $g(x)$:  $h(x)$: 

ג. 2 פתרונות. **ד.** $(3,0)$, $(5,0)$.

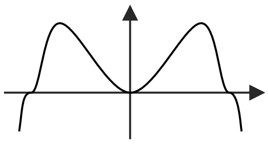
2) א. 1. $(0,16)$. **2.** $\max(4,32)$, $\min(1,5)$. **ב.** השרטוט משמאל.



ג. גרף II. **ד. 1.** שלושה פתרונות. **2.** שלושתם חיוביים.

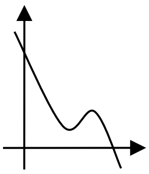
3) א. 1. $(\sqrt{8},0)$, $(0,0)$, $(-\sqrt{8},0)$. **2.** $\max(-2, 4{,}096)$, $\min(0,0)$, $\max(2, 4{,}096)$.

3. עלייה : $x<-2$ או $0<x<2$; ירידה : $-2<x<0$ או $x>2$. **4.**



5. זוגית. **ב.** גרף III.

4) א. $b=3$. **ב. 1.** $(0, 116)$. **2.** $\max(6,8)$, $\min(4,4)$. **ג.** השרטוט משמאל.



ד. $\max(6,20)$, $\min(4,16)$. **ה.** גרף II.

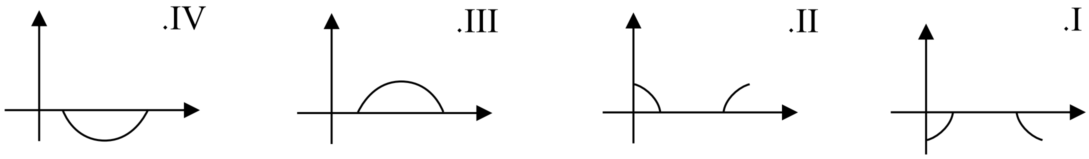
פונקציית שורש ריבועי

1. נתונה הפונקציה הריבועית: $f(x)=\sqrt{-x^2+10x-16}$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלה.
3. תחומי החיוביות והשליליות.

ב. קבעו איזה מהגרפים הבאים הוא גרף הפונקציה $f(x)$.



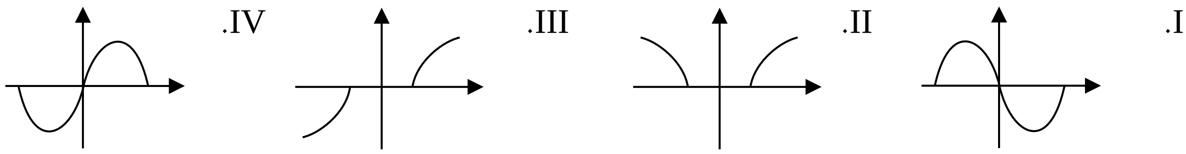
2. נתונה הפונקציה $f(x)=-x\cdot\sqrt{16-x^2}$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. תחומי החיוביות והשליליות.

ב. קבעו אם הפונקציה זוגית, אי-זוגית או שאינה זוגית ואינה אי-זוגית.

ג. קבעו איזה מהגרפים הבאים הוא גרף הפונקציה $f(x)$:

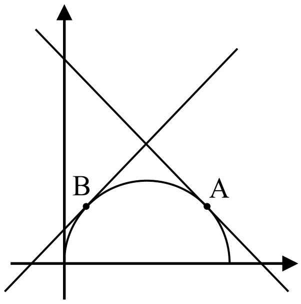


ד. נתון שלמשוואה $f(x)=p$ יש פתרון אחד ($0<p$). קבעו כמה פתרונות יש למשוואות הבאות:

i. $f(x)=-p$ ii. $f(x)=2p$

ה. נתונה הפונקציה $h(x)=\sqrt{f(x)}$. מצאו את תחום ההגדרה של $h(x)$.

3. הנקודות A ו-B, ששיעור ה-y שלהן הוא 2, נמצאות על גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$ כמתואר בשרטוט.



א. מצאו את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצאו את משוואות הישרים המשיקים לגרף $f(x)$ בנקודות A ו-B.

ג. הנקודה C נמצאת על ציר ה-x. חשב את שטח המשולש ΔABC.

4. נתונה הפונקציה : $f(x)=x^2\cdot\sqrt{12-2x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הראו כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

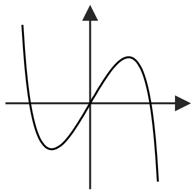
ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

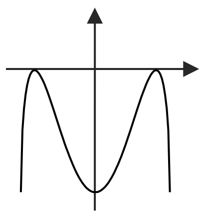
ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. אחד מהגרפים שלפניכם הוא גרף הנגזרת $f'(x)$.
קבעו איזה מהגרפים הוא המתאים. נמקו.

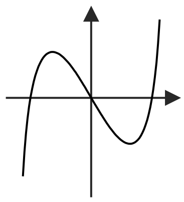
I.



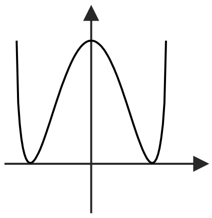
II.



III.



IV.



5. (*) אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה : $f(x)=ax^2\cdot\sqrt{b-x}$ היא $(4,16)$.

א. מצאו את a ו-b.

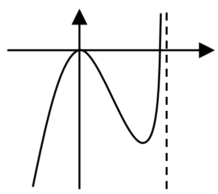
ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את :

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
4. תחומי העלייה והירידה.

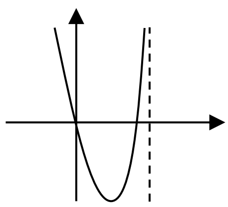
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. אחד מהגרפים שלפניכם הוא גרף הנגזרת $f'(x)$.
קבעו איזה מהגרפים הוא המתאים. נמקו.

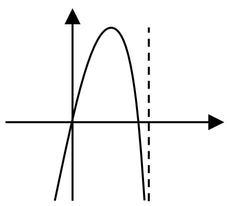
I.



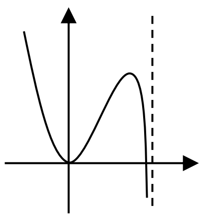
II.



III.



IV.



תשובות:

1) א. 1. $2 \le x \le 8$. **2.** $(2,0)$, $(8,0)$. **3.** חיוביות: $2 < x < 8$; שליליות: אף x. **ב.** III.

2) א. 1. $-4 \le x \le 4$. **2.** $(-4,0)$, $(0,0)$, $(4,0)$. **3.** חיוביות: $-4 < x < 0$; שליליות: $0 < x < 4$.

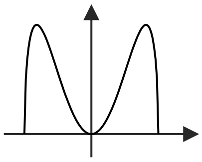
ב. אי-זוגית. **ג.** גרף I. **ד. i.** פתרון אחד. **ii.** אף פתרון. **ה.** $-4 \le x \le 0$, $x=4$.

3) א. $A(4,2)$, $B(1,2)$. **ב.** הישר $y=-\frac{3}{4}x+5$ משיק בנקודה A ; הישר $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ משיק בנקודה B.

ג. 3 יח"ר.

4) א. $-\sqrt{6} \le x \le \sqrt{6}$. **ג.** $(-\sqrt{6},0)$, $(0,0)$, $(\sqrt{6},0)$. **ד.** פנימיות: $\max(-2,8)$, $\min(0,0)$, $\max(2,8)$.

בקצה התחום: $\min(-\sqrt{6},0)$, $\min(\sqrt{6},0)$. **ה.**



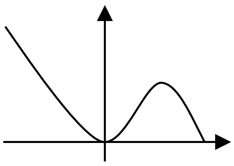
ו. גרף I.

5) א. $a=1$, $b=5$. **ב. 1.** $x \le 5$. **2.** $(0,0)$, $(5,0)$.

3. פנימיות: $\max(4,16)$, $\min(0,0)$. קצה: $\min(5,0)$.

4. עולה: $0 < x < 4$; יורדת: $4 < x < 5$ או $x < 0$.

ג. השרטוט משמאל. **ד.** גרף III.



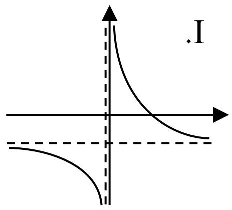
פונקציית מנה

1. לפניכם שלוש פונקציות : $f(x)=\frac{3-x}{x}$, $g(x)=\frac{x-3}{x^2}$, $h(x)=\frac{(3-x)^2}{x}$.

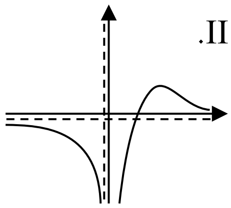
לפניכם שלושה גרפים.

התאימו כל גרף לפונקציה המתאימה. הסבירו את תשובתכם.

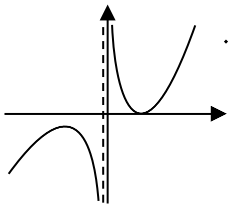
I.



II.



III.



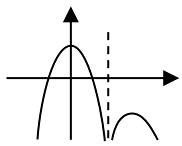
2. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+4x-12}{x-3}$.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את :

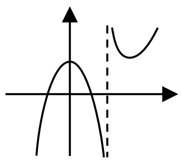
1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. תחומי החיוביות והשליליות.
4. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. לפניכם ארבעה גרפים. קבעו איזה מהגרפים הוא גרף הפונקציה $f(x)$:

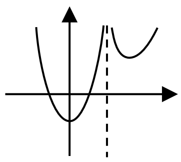
I.



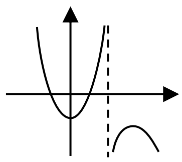
II.



III.



IV.



ג. נתון ששיעורי ה-x של נקודות הקיצון הם : $x_1=0$ ו- $x_2=6$. מצאו את שיעורי ה-y שלהן.

ד. מצאו עבור אילו ערכי k למשוואה $k=\frac{x^2+4x-12}{x-3}$:

1. יהיו שני פתרונות.
2. יהיה פתרון אחד.
3. לא יהיו פתרונות.

3. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^3+12-x^2}{x^3}-3$.

א. קבעו אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי זוגית. נמקו.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. שיעורי נקודות הקיצון וסוגן.
4. תחומי העלייה והירידה.
5. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו לאילו ערכי k יהיו לישר $y=k$ שתי נקודות חיתוך עם הפונקציה.

ה. נתונה הפונקציה החדשה: $g(x)=-f(x)$. מבלי לגזור את הפונקציה $g(x)$:

1. שרטטו סקיצה של הפונקציה $g(x)$.
2. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

4. נקודת הקיצון של גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-4a}{x^2-1}$ נמצאת על הישר $y=4$.

א. מצאו את a.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.
4. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. האסימפטוטות של גרף הפונקציה $f(x)$ נחתכות בנקודות A ו-B. חשבו את שטח הטרפז שקודקודיו הן הנקודות A ו-B ונקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

5. שתיים מהאסימפטוטות של הפונקציה: $f(x)=2+\frac{2x^2-x-62}{b-x^2}$ נחתכות בנקודה $(6,0)$.

א. מצאו את b.

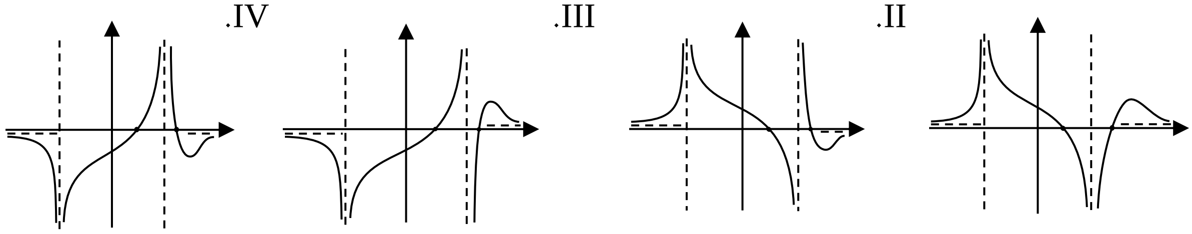
ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
4. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. קבעו איזה מארבעת הגרפים הנתונים עשוי להיות גרף של הנגזרת $f'(x)$. נמקו.

I. II. III. IV.



6. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-2a}{x^2}$, $0<a$.

בסעיפים הבאים ניתן, במידת הצורך, להיעזר בתשובות בפרמטר a.

א. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודת החיתוך עם הצירים.
3. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.
4. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. לפניכם טענה: ״ככל ש-a גדול יותר, נקודת הקיצון של הפונקציה קרובה יותר לציר ה-x״.
קבעו אם הטענה נכונה או שגויה. הסבירו את תשובתכם.

ד. (*) קבעו כמה פתרונות יש למשוואה: $f^2(x)=-f(x)$.
הסבירו את תשובתכם.

7. (*) נתונה הפונקציה הזוגית: $f(x)=\dfrac{81+px-x^2}{x^2+9}$.

א. מצאו את p.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.
4. האסימפטוטות המקבילות לצירים, אם יש כאלה.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מעגל שמרכזו בראשית הצירים עובר בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הכיוון החיובי של ציר ה-x. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או שגויה:

i. מעגל זה עובר גם בנקודות החיתוך האחרות של גרף $f(x)$ עם הצירים.

ii. היקפו של המעגל הוא 81π יח׳ אורך.

8. א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$. עבור כל טענה, קבעו אם היא נכונה או שגויה. נמקו:

i. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא: $x\neq-1$ ו- $x\neq1$.

ii. לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת אי רציפות סליקה (״חור״) עבור $x=-1$.

iii. לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון.

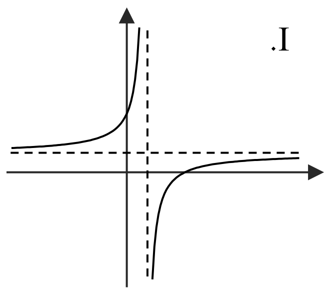
iv. הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום: $x>-1$.

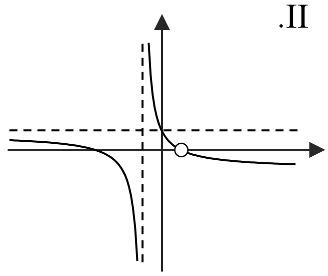
v. הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום: $x<-1$.

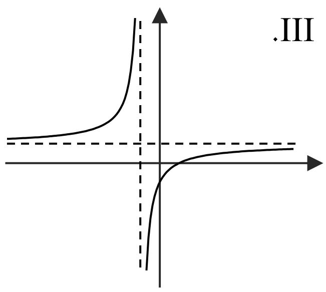
vi. הישר $x=1$ הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה $f(x)$.

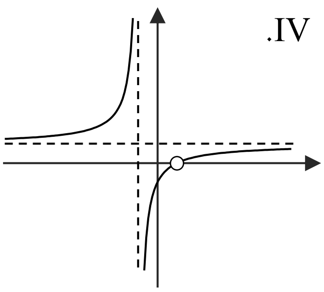
vii. הישר $y=1$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרף הפונקציה $f(x)$.

ב. קבעו איזה מהגרפים הבאים מתאר את הפונקציה $f(x)$:

I.


II.


III.


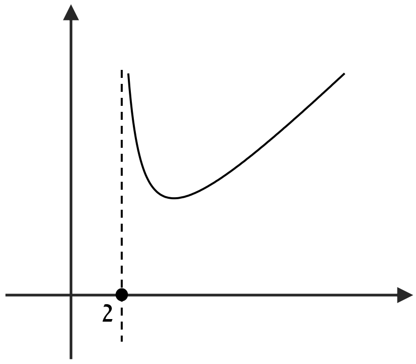
IV.


ג. מצאו עבור אילו ערכי p, הישר $y=p$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצאו עבור אילו ערכי t, הישר $x=t$ אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.

9. (*) לפניכם החלק של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-b^2}$ הנמצא מימין לאסימפטוטה $x=2$.

בסעיפים הבאים התייחסו גם לתחום: $x<2$.



א. 1. מצאו את b, בהינתן שהוא חיובי.

2. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

3. מצאו שיעורי נקודת אי רציפות סליקה (חור) של הפונקציה $f(x)$.

ב. 1. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

2. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום: $x<2$.

ד. דרך נקודת אי הרציפות הסליקה של הפונקציה $f(x)$ עוברים שני ישרים: האחד מקביל לציר ה-x והשני מקביל לציר ה-y. חשבו את השטח הכלוא בין שני ישרים אלו לבין הצירים.

תשובות:

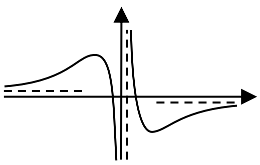
1) $f(x)$ מתאימה לגרף הימני: הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה $(3,0)$ **וחיובית** בינה לבין ציר ה-y.

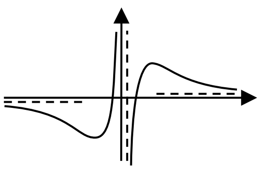
$g(x)$ מתאימה לגרף האמצעי: הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה $(3,0)$ **ושלילית** בינה לבין ציר ה-y.

$h(x)$ מתאימה לגרף השמאלי: הפונקציה חותכת את ציר ה-x בנקודה $(3,0)$ **ואי-שלילית** בתחום $0\le x$.

2) א. 1. $x\neq3$. **2.** $(2,0)$, $(-6,0)$, $(0,4)$. **3.** חיוביות: $3<x$, $-6<x<2$; שליליות: $2<x<3$, $x<-6$. **4.** $x=3$. **ב.** II. **ג.** $y_1=4$, $y_2=16$. **ד. 1.** $16<k$, $k<4$. **2.** $k=16$, $k=4$.

3. $4<k<16$.



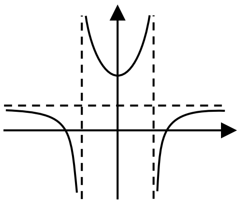


3) א. אי זוגית. **ב. 1.** $x\neq0$. **2.** $(-3.46,0),(3.46,0)$. **3.** $\max\left(-6,\frac{1}{9}\right),\min\left(6,-\frac{1}{9}\right)$.

4. עולה: $6<x$ או $x<-6$; יורדת: $0<x<6$ או $-6<x<0$.

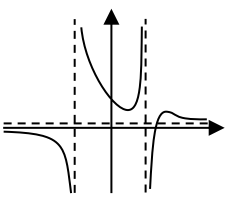
5. $y=0$, $x=0$. **ג.** השרטוט העליון. **ד.** $k=0,-\frac{1}{9},\frac{1}{9}$. **ה. 1.** השרטוט התחתון.

2. חיוביות: $3.46<x$ או $-3.46<x<0$; שליליות: $0<x<3.46$ או $x<-3.46$.



4) א. $a=1$. **ב. 1.** תחום הגדרה: $x\neq\pm1$. **2.** (0,4), (2,0), (-2,0). **3.** $\min(0,4)$.

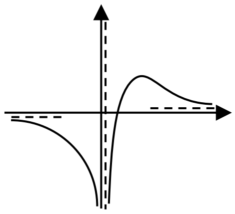
4. $y=1$, $x=1$, $x=-1$. **ג.** השרטוט משמאל. **ד.** 3 יח"ר.



5) א. $b=36$. **ב. 1.** תחום הגדרה: $x\neq\pm6$. **2.** (10,0), (0,0.28).

3. $\max(18,0.02)$, $\min(2,0.25)$. **4.** $y=0$, $x=6$, $x=-6$.

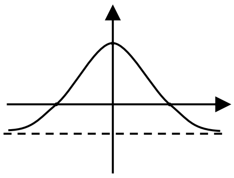
ג. השרטוט משמאל. **ד.** גרף IV.



6) א. 1. $x \neq 0$. **2.** $(2a,0)$. **3.** $\max(4a,\frac{1}{8a})$.

4. $x = 0$, $y = 0$. **ב.** השרטוט משמאל.

ג. נכונה. **ד.** שלושה פתרונות.

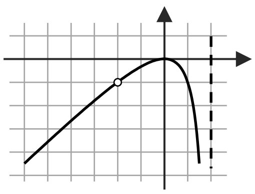


7) א. $p = 0$. **ב. 1.** כל x. **2.** (9,0), (0,9), (-9,0). **3.** $\max(0,9)$.

4. $y = -1$. **ג.** השרטוט משמאל. **ד. i.** נכונה. **ii.** שגויה.

8) א. i. נכונה. **ii.** שגויה. **iii.** נכונה. **iv.** שגויה. **v.** נכונה. **vi.** שגויה. **vii.** נכונה.

ב. גרף IV. **ג.** $p=0,1$. **ד.** $t=1,-1$.

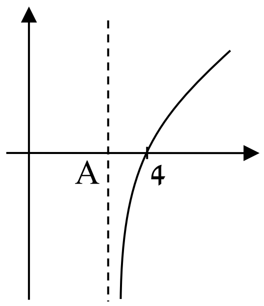


9) א. 1. $b = 2$. **2.** $x \neq -2 , x \neq 2$. **3.** $(-2,-1)$. **ב. 1.** $\max(0,0)$, $\min(4,8)$.

2. עלייה : $x > 4$ או $-2 < x < 0$ או $x < -2$; ירידה : $0 < x < 2$ או $2 < x < 4$.

ג. השרטוט משמאל. **ד.** 2 יח״ר.

פונקציית שורש עם מנה



1. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x-m}}$. לפניכם גרף **הנגזרת** $f'(x)$ שהאסימפטוטה האנכית שלו חותכת את ציר ה- x בנקודה A.

א. היעזרו בנתון המופיע בגרף ומצאו את m.

ב. נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא גם תחום ההגדרה של הנגזרת $f'(x)$. מצאו את שיעורי הנקודה A.

ג. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים, אם יש כאלה.
3. שיעורי נקודת הקיצון ואת סוגה.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

2. (*) המרחק בין שתי האסימפטוטות האופקיות של גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{mx^2-4}}{x-1}$ הוא 2m.

א. מצאו את m.

ב. עבור הפונקציה $f(x)$ מצאו את:

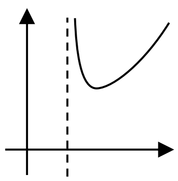
1. תחום ההגדרה.
2. שיעורי נקודות החיתוך עם הצירים.
3. שיעורי נקודות הקיצון ואת סוגן.
4. האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. (**) מגדירים את הפונקציה: $g(x)=\left[f(x)\right]^n$. n מספר טבעי.

מצאו את תחומי **הירידה** של הפונקציה $g(x)$. הבחינו בין ערכי n שונים. נמקו את תשובתכם.

תשובות:



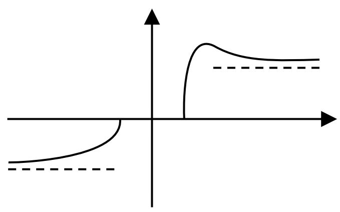
1) א. $m=3$. **ב.** $A(3,0)$. **ג. 1.** $3<x$. **2.** אין נקודות חיתוך. **3.** $\min(4,16)$. **ד.**

2) א. $m=1$. **ב. 1.** $2\le x$ או $x\le -2$. **2.** $(2,0),(-2,0)$.

3. פנימית: $\max(4,1.15)$. קצה: $\min(2,0)$, $\max(-2,0)$. **4.** $y=\pm1$.

ג. השרטוט משמאל.

ד. עבור n זוגי: $4<x$ או $x<-2$. עבור n אי זוגי: $4<x$.



בעיות קיצון

1. המשולש ΔABC הוא ישר זווית $(AB \perp BC)$.

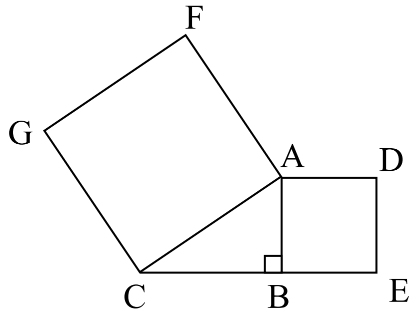
על הצלע AB בנו את הריבוע ADEB.

על הצלע AC בנו את הריבוע ACGF.

נתון: 14 ס"מ = CE. נסמן: $DE = x$.

א. הביעו באמצעות x את אורך היתר AC.

ב. מצאו עבור איזה ערך של x יהיה היקף הריבוע ACGF מינימלי.

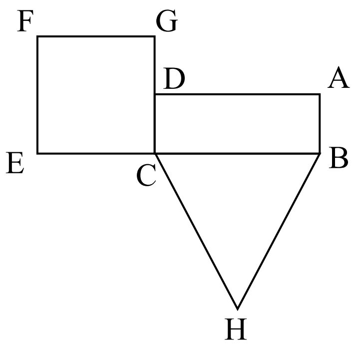


2. לפניכם שרטוט של צורה המורכבת מהריבוע CEFG, מהמלבן ABCD ומהמשולש שווה הצלעות ΔBCH. הנקודה D היא אמצע הצלע CG. שטח המלבן ABCD הוא 24 סמ"ר. נסמן: $GF = 2x$.

א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע BH.

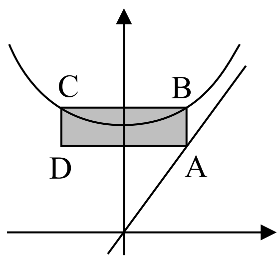
ב. מצאו את ערכו של x שעבורו היקף **הצורה כולה** הוא מינימלי.

ג. כאשר היקף הצורה כולה הוא מינימלי, חשבו את שטח הריבוע CEFG.



3. הנקודה A נמצאת על הישר $y = 27x$ ברביע הראשון. הנקודות B ו-C נמצאות על הפרבולה $f(x) = x^2 + 216$ כך שמתקבל המלבן ABCD שצלעותיו מקבילות לצירים כמתואר בשרטוט. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה A באמצעות t. מצאו את ערכו של t שעבורו שטח המלבן ABCD:

א. מקסימלי. ב. מינימלי.



4. הנקודות A ו-B נמצאות על גרף הפרבולה: $y = -x^2 + 10x$ ברביע הראשון.

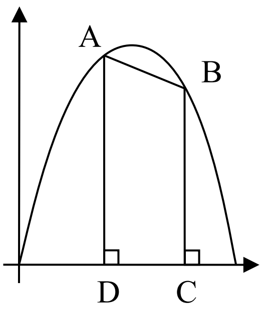
מהנקודות A ו-B הורידו אנכים לציר ה-x כך שהתקבל הטרפז ABCD כמתואר בשרטוט. נסמן: $x_A = t$ (שיעור ה-x של הנקודה A הוא t).

נתון ששיעור ה-x של הנקודה B גדול פי-2 משיעור ה- x של הנקודה A.

א. הראו ששיעורי הנקודה B הם: $(2t\ ,\ -4t^2 + 20t)$.

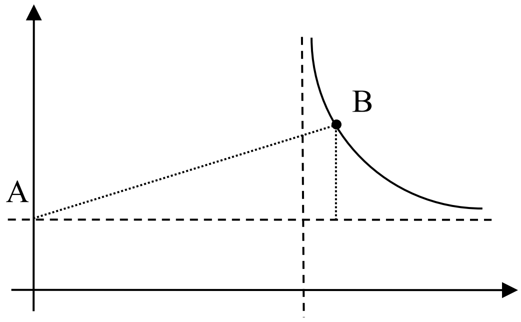
ב. מהם שיעורי הנקודה A שעבורה יהיה שטח הטרפז מקסימלי?

ג. כאשר שטח הטרפז ABCD מקסימלי, חשבו את שיפוע הצלע AB.



5. נתונה סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x}{x-9}$ ברביע הראשון.

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה-y בנקודה A.



א. מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ב. מהנקודה B הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לאסימפטוטה האופקית ומתחו קו ישר לנקודה A, כך שנוצר משולש ישר זווית.

מצאו את שיעורי הנקודה B שעבורה סכום אורכי הניצבים במשולש זה הוא מינימלי.

ג. עבור שיעורי הנקודה B שמצאתם בסעיף ב', מהו שיפוע היתר AB?

תשובות:

1) א. $\sqrt{2x^2-28x+196}$. **ב.** $x=7$.

2) א. $\frac{24}{x}$. **ב.** $x=3$. **ג.** 36 סמ"ר.

3) א. 6. **ב.** 12.

4) ב. $A(4,24)$. **ג.** -2 .

5) א. $y=1$, $x=9$. **ב.** $B(12,4)$. **ג.** 0.25 .